ENGENHARIA DIDÁTICA PARA DISCUSSÃO GEOMÉTRICA E RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU: ANÁLISES PRELIMINARES E A PRIORI

GUTTENBERG SERGISTÓTANES SANTOS FERREIRA [1], FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES [2],

[1,2]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)
[1]Campus de Juazeiro do Norte
[2] Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGER)
<guttenberg@ifce.edu.br>, <fregis@ifce.edu.br>
DOI: 10.21439/conexoes.v9i4.986

Resumo. Neste artigo discutimos uma metodologia para resolução de equações de 1º grau com viés geométrico, através do Teorema de Tales. Este modelo trata da localização do zero de equações afins através de elementos da Geometria Plana. Ademais, apresentamos considerações sobre a Engenharia Didática, e descrevemos apenas as etapas iniciais: análises preliminares, e construção e análises a priori, ao passo que discutimos uma situação problema para aplicação em sala de aula. A descrição das etapas iniciais da Engenharia Didática prevê explorar os aspectos investigativos no estudante possibilitando a experimentação matemática através de situações didáticas de ensino, inclusive com uso recursos tecnológicos utilizando o GeoGebra e ainda no contexto de investigação histórica. Com isto, este trabalho objetivou realizar estudo contextualizado e geométrico sobre resolução de equações de 1º grau e sua aplicação junto a discentes através da teoria da Engenharia Didática, tratando-se de uma revisão bibliográfica.

Palavras-chaves: Ensino de Matemática. Equações de 1º Grau. Engenharia Didática. Interpretação Geométrica

Abstract. This paper discusses a methodology for solving 1st degree equations with geometric bias through Tales theorem. This model comes to the location of the zero of related equations through elements of Plane Geometry. In addition, we present consideration of the Didactic Engineering, and describe only the initial stages: preliminary analysis, and construction and a priori analysis, while we discuss a problem situation for application in the classroom. The description of the initial stages of the Didactic Engineering is planning to operate the investigative aspects of student mathematics enabling experimentation through didactic teaching situations, including the use technological resources using GeoGebra and still in the context of historical research. As a result, this study aimed to perform contextual and geometric study of solving 1st degree equations and its application with the students through the theory of Didactic Engineering, in the case of a literature review.

Keywords: Mathematics Teaching. 1st degree equations. Didactic Engineering. Geometric interpretation.

1 INTRODUÇÃO

A resolução de equações polinomiais de 1º grau quando discutida em livros de Matemática (DANTE, 2004; MARCONDES; GENTILL; GRECO, 2003; GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JUNIOR, 2005; SILVA; BARRETO FILHO, 2005; PAIVA, 2005; SMOLE; DINIZ, 2005) ou de História da Matemática (BOYER; PÉREZ, 2010; CONTADOR, 2008; EVES, 2004) remete aos conhecimentos propostos por Euclides (Euclides de Alexandria, matemático da qual não se conhece sua nacionalidade, nem sua data de nascimento, estima-se que sua morte ocorreu por volta de 300 a.C) em sua obra *Os elementos*[1]. Os axiomas que até hoje norteiam a Matemática contemporânea, contidos no Livro I da obra acima citada, estão abaixo elencados:

[1]Livro escrito por Euclides, em 13 volumes, que discute desde a geometria euclidiana até a versão grega de teoria dos números, citando axiomas, teoremas e provas desses teoremas.

- entidades iguais a uma terceira são iguais entre si (se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$);
- se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais (se $a = b$ então $a + c = b + c$ ou $a - c = b - c$);
- iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais (se $a = b$ então $a \cdot c = b \cdot c$ ou $a \div c = b \div c$, com $c \neq 0$).

As equações do 1º grau, genericamente representadas por $ax + b = c, (a \neq 0)$, são resolvidas segundo as proposições acima. Destarte, $ax + b - b = c - b$, implica em $\frac{ax}{x} = \frac{c-b}{a}$, logo $x = \frac{c-b}{a}$. Segundo Contador (2008), os axiomas de Euclides possibilitaram esta resolução e ainda propiciou toda a base para resolução de qualquer forma de equação, independente do grau de complexidade.

A problemática que norteou esta pesquisa se dividiu em duas partes: como propor uma resolução geométrica para equações de primeiro grau e seu ensino sistematizado através da Engenharia Didática. Tomando por hipótese que a aplicação do teorema do Tales para resolução de equações do 1º grau se mostra como método geométrico viável que a correta utilização da Engenharia Didática pode favorecer a aprendizagem. Na próxima seção faremos uma discussão epistemológica sobre a fórmula algébrica e o modelo geométrico para resolução de equação afim.

2 MODELO GEOMÉTRICO

Para equações do 1º grau do tipo $ax \pm b = 0$ além da forma algébrica usual de resolução, existe também um modelo para localização de sua raiz, através da construção geométrica no plano. Segundo Ferreira (2014), este método de resolução utiliza semelhança de triângulos, utilizando o teorema de Tales de Mileto (matemático grego, 640 – 550 a.C) sobre proporcionalidade entre segmentos paralelos cortados por transversais.

A construção geométrica sugerida utiliza dois segmentos de reta, concorrentes na origem, partindo da origem, um com comprimento igual a b (segmento $\overline{OB}$) e outro com comprimento igual a a (segmento $\overline{OA}$). Após este procedimento, deve-se traçar outro segmento de reta ($\overline{AB} = r$) de modo que una os extremos de $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$. No segmento $\overline{OA}$, marcamos um ponto C, com comprimento igual a 1 unidade, e sobre este ponto traçamos outro segmento de reta, paralelo segmento $\overline{AB}$ e concorrente em $\overline{OB}$ no ponto D (segmento $\overline{CD} = s$). Com isso, o segmento $\overline{OD}$, de comprimento x, representa a solução da equação desejada (Figura 1), pois $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, logo $\frac{x}{1} = \frac{b}{a}$.

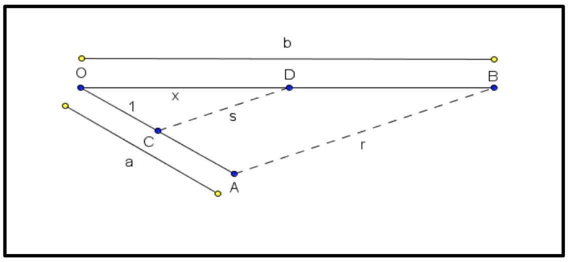

Figura 1: Semelhança de triângulos para resolução de equações de 1º grau Fonte: Formatação própria

Destarte, as equações resolvidas através deste método nos fornece a raiz através do segmento $\overline{OD}$, uma vez que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são trabalhados em módulo. Generalizando, percebemos que quando $a < 0$ ou $b < 0$, a raiz procurada é um número negativo; ou então, quando $a < 0$ e $b < 0$, temos que a raiz é positiva.

Na próxima seção faremos uma breve introdução sobre tendência metodológica conhecida como Engenharia Didática. E ainda, faremos ponderações sobre as análises preliminares e a priori para interpretação geométrica da fórmula algébrica para resolução de equações do 1º grau, ressaltando seu grau de importância para o desenvolvimento sistematizado do ensino de Matemática segundo a Engenharia Didática.

3 ENGENHARIA DIDÁTICA

A tendência metodológica de ensino denominada Engenharia Didática foi desenvolvida e sistematizada por Michelle Artigue na década de 1980 na escola francesa de Educação Matemática. Segundo Pommer (2013), as discussões sobre Didática da Matemática, desenvolvidas no IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática), foram responsáveis pela criação e por estudos posteriores da teoria da Engenharia Didática. Almouloud e Coutinho (2008) afirmam que esta teoria pode ser definida como uma variação do trabalho didático, no cerne da metodologia de ensino, e que pode ser comparado ao trabalho realizado pelo engenheiro nos aspectos análogos para construção de raciocínio; e ainda que o trabalho deva estar fundamentado em conhecimentos científicos e ser submetido a normas de controle também científicos, sempre procurando trabalhar com objetos mais complexos.

Outra explicação sobre Engenharia Didática nos é fornecida por Machado (2002, p. 199), quando a explica “como um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise das sequências de ensino", possibilitando a compreensão de que esta teoria surgiu com foco nas atividades educativas promovidas pelos professores que detinham pouca fundamentação científica sobre os temas desenvolvidos em sala de aula, e por isso, necessitavam de melhorias para sistematização do ensino.

Ainda no sentido de compreender com maior precisão a Engenharia Didática, recorremos a Carneiro (2005) quando cita que esta metodologia está ligada à valorização da *práxis* pedagógica do docente, de modo que o docente perceba que as teorias desenvolvidas no ambiente extraescolar não são suficientes para discutir o sistema de ensino e influenciar em suas transformações. O mesmo autor ainda sugere que a Engenharia Didática foi proposta proeminentemente a partir da discussão das relações existentes entre a sistematização do ensino e a pesquisa aplicada em sala de aula; e da estrutura física destinada às práticas pedagógicas e ao processo metodológico pelo qual seria submetida esta pesquisa. Tomando por base estas ponderações, percebemos que a teoria da Engenharia Didática surgiu como alternativa para sistematizar o processo de ensino, revigorar as relações de aprendizagem, propiciar reflexões tanto para docentes quanto para discentes, ao passo em que se discutem as práticas pedagógicas à luz da metodologia da pesquisa e da estrutura destinada às mesmas, ratificando que tudo isto se deu devido à necessidade de fomentar, discutir e correlacionar diretamente a pesquisa e o ensino de Matemática.

Partindo de todos esses pressupostos, a Engenharia Didática foi fundamenta e estruturada segundo cinco fases de aplicação: análises preliminares; construção e análise *a priori*; experimentação; análise *a posteriori* e validação. Neste artigo nos ateremos somente às duas fases iniciais aplicadas às interpretações geométricas para resolução de equações do 1º grau, uma vez que esta pesquisa ainda se encontra em fase inicial. Este artigo científico faz parte de um estudo em que propõe todas as fases da Engenharia Didática, enquanto experimentação sistematizada do ensino de Matemática, de modo que o trabalho completo ainda está em construção.

4 Análises preliminares

Esta é a fase responsável pelo planejamento da atividade proposta aos discentes. O professor de Matemática deve considerar não somente os objetivos a que deseja alcançar, mas também em quais condições o trabalho será realizado, independente de essas dificuldades serem físicas ou comportamentais. Sobre isto, Almouloud (2007, p. 172) destaca dois elementos: estudo da organização matemática; e análise didática do objeto matemático escolhido.

Quando discutimos o estudo da organização matemática recorremos à base do processo de resolução para equações do 1º grau e de sua interpretação geométrica. Outra possibilidade que pode ser explorada pelo professor em sala de aula se refere ao uso didático daquele modelo já proposto, visto por nós não somente como uma forma de propiciar uma aula diferenciada aos estudantes, mas também como forma de ressignificar os saberes matemáticos e favorecer a discussão das relações entre álgebra e geometria. Vale ressaltar que não pretendemos discutir neste estudo o caráter abstracionista da Matemática, mas apenas permitir que o estudante tivesse contato direto com a Matemática palpável, na qual ele possa manipular seus elementos e testar suas conjecturas através da experimentação laboratorial, através de elementos físicos ou de construções computacionais. Com isso, temos que discutir os prováveis obstáculos epistemológicos que venham a surgir oriundos desse estudo, uma vez que não basta apenas conhecer os axiomas de Euclides para resolver determinada equação de 1º grau ou os elementos pertencentes à Geometria Plana necessários neste estudo, e sim, relacionar à reinterpretação dos saberes ora propostos e aplicá-los no cotidiano.

A outra vertente destacada por Almouloud (2007) versa sobre a discussão quanto à análise didática do objeto matemático, no qual consideramos a abordagem feita em livros de História da Matemática ou, pelo menos, nos apêndices históricos dos livros de Matemática da Educação Básica, ademais, temos a necessidade de prever as possíveis dificuldades cognitivas para que ocorra a aprendizagem pelos estudantes do tema aqui abordado. Alves (2014) sugere, como hipótese, que os estudantes possuem dificuldades para relacionar elementos geométricos e algébricos, e que devido a isto se mostram naqueles livros apenas como uma interpretação algébrica.

5 Construção e análises *a priori*

Nesta fase da Engenharia Didática o docente deve realizar a descrição e a análise da situação adidática escolhida por ele e que será proposta ao estudante. Sobre isto, Alves (2014) destaca que uma situação adidática é caracterizada quando o professor oportuniza ao estudante o sucesso através de seus próprios méritos, quando consegue sintetizar e empregar o conhecimento de um modo diferenciado. Nesta perspectiva ressaltamos o professor como mediador de aprendizagem, com a função de prever ações comportamentais que favoreçam, ou não, o desenvolvimento do conhecimento lógico matemático. Neste escopo, o professor age concomitantemente segundo a dimensão epistemológica, bem como a cognitiva e a didática (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008).

Com isso, a situação adidática, escolhida de forma ampla, sugere de forma simplória apenas a reinterpretação geométrica da resolução de uma equação de 1º grau, cuja gênese recai diretamente nos axiomas de Euclides já abordados neste estudo. Restringindo os aspectos conceituais do estudo, podemos dizer que a problemática se refere ao uso do Teorema de Tales, discutindo os segmentos proporcionais cortados por retas transversais. Destarte, afirmamos que o estudante necessita do conhecimento de Geometria Plana bem como de uso de software para compilação gráfica (neste caso utilizamos o GeoGebra para realizar as construções geométricas).

Alves (2014) afirma que o discente precisa compreender a situação-problema para que possa desenvolver a solução, cabendo ao professor a proposição de tarefas passíveis de execução, enquanto que media a aprendizagem e efetiva a situação adidática numa situação didática. Almouloud (2007) corrobora com esta ideia quando caracteriza os objetivos de atividades semelhantes, segundo os princípios da Engenharia Didática, como sendo: auxiliar o estudante na construção e desenvolvimento do conhecimento, reinterpretar os saberes do Teorema de Tales, inclusive com outras abordagens geométricas aliando a isto o uso do recurso computacional.

A seguir, faremos uma discussão sobre situação-problema para resolução segundo o modelo aqui discutido, favorecendo a construção do modelo geométrico através da experimentação tecnológica feita pelo estudante. Uma situação possível nessa experimentação matemática é a discussão quanto à validade de determinada teoria, a fim de corroborar ou negar a eficácia do método, ilustrando a experimentação discente.

5.1 Situação-problema

É solicitada a resolução da equação $2x - 6 = 0$ e, posteriormente, sua construção geométrica, em tempo se pede a resolução da equação $-6x - 2 = 0$, da mesma forma que a anterior e, por fim, realizar um estudo comparativo entre as soluções.

Ocorre que as soluções de ambas as equações podem ser obtidas com o uso da fórmula, $x = \frac{c-b}{a}$, uma vez que as equações são do tipo $ax + b = c, (a \neq 0)$. Sem maiores delongas, calculamos que a raiz de $2x - 6 = 0$ é dada pelo número $x = 3$ e sua construção geométrica é apresentada na Figura 2. De modo análogo se procede com a equação $-6x - 2 = 0$, cuja raiz é $x = -\frac{1}{3}$, cuja construção geométrica está indicada

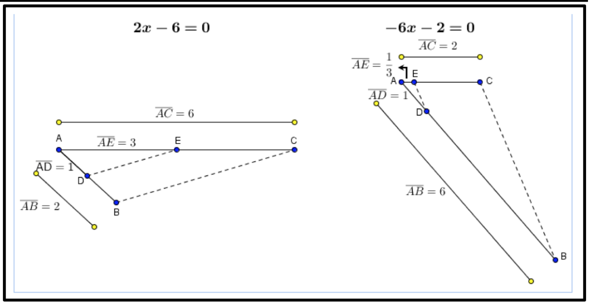

Figura 2: Resolução de equações de 1º grau Fonte: Formatação própria

ainda na Figura 2. Vale destacar que o segmento obtido é dado em módulo e cabe ao estudante perceber as condições, já discutidas, quanto ao sinal do zero desejado.

A partir de construções simples como esta, o estudante consegue diversificar seus estudos ao passo que pratica a construção geométrica. Vale ressaltar que este método se aplica a todas as equações do 1º grau do tipo $ax \pm b = 0$, em que o procedimento calcula a raiz da referida equação. Situações semelhantes colaboram para que o estudante desenvolva seu pensamento matemático, e ainda tenha a oportunidade de confirmar ou refutar as hipóteses que porventura surjam durante sua pesquisa. A verificação dos problemas acima citados, assim como outros que possam ser propostos, é indicada ao leitor mais interessado, pois a experimentação dessas situações contribui para o trabalho docente e consequente melhoria em sala de aula.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve por finalidade discutir um estudo sobre uma metodologia diferenciada para resolução de equações afins envolvendo a perspectiva geométrica. Houve o cuidado de se elaborar este trabalho com uma linguagem matemática simples e acessível, mas, no entanto, sem perder a generalidade e o rigor matemático necessário ao desenvolvimento deste estudo.

Nas seções passadas discutimos brevemente a resolução de equações de 1º grau a partir dos axiomas de Euclides e uma discussão geométrica para o cálculo dessa raiz utilizando do Teorema de Tales. Em tempo, descrevemos as etapas iniciais da Engenharia Didática, considerando a interpretação geométrica das equações de 1º grau, trabalhando inclusive com uma situação adidática. Inicialmente realizamos leituras em livros especializados de Matemática, de História da Matemática e periódicos a fim de fundamentar o modelo resolutivo ora abordado.

A pesquisa revelou como positiva proposta de diversificação metodológica para ensino de equações de 1º grau através de construções geométricas utilizando elementos da Geometria Plana, especificamente com o auxílio do Teorema de Tales. Revelou ainda que o conhecimento matemático por vezes tido apenas como algébrico, pode ser experimentado com práticas laboratoriais de ensino, nesta pesquisa através do software GeoGebra, e que isso favorece a aprendizagem. Para isto, utilizamos da metodologia da Engenharia Didática, com o intuito de sistematizar o ensino. Entretanto, por se tratar de uma pesquisa ainda em andamento, aplicamos apenas as duas primeiras fases da metodologia, de modo que ainda discutiremos as outras fases de aplicação em trabalhos futuros.

Finalmente, acrescentamos que a proposta deste estudo é subsidiar trabalhos que versem sobre alternativas metodológicas de resolução de equações de 1º grau, mais especificamente em aspectos geométricos. Destarte, reiteramos que a discussão apresentada neste trabalho não se encontra finalizado, mas passível de melhorias e novas reflexões. Entretanto, assinalamos que este estudo já possa servir de substrato para o desenvolvimento de propostas didáticas para o ensino de equações de 1º grau, independente da modalidade de ensino observada.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008.

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Florianópolis: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática para o teorema da função implícita: análises preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 7, n. 3, p. 148–168, 2014.

BOYER, C. B.; PÉREZ, M. M. *Historia de la matemática*. 3. ed. São Paulo: Ed. Blucher, 2010.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *Zetetike*, Campinas, v. 13, n. 23, p. 85–118, 2005.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática: uma breve história*. São Paulo: Editora Livraria da Fisica, 2008. v. 1 e 2.

DANTE, L. R. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2004.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. 6. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA, G. S. S. *Equações algébricas: aspectos históricos e um estudo sobre métodos algébricos, geométricos e computacionais de solução*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R. *Matemática completa*. São Paulo: Editora FTD, 2005. v. 1, 2 e 3.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). *Educação Matemática. uma Introdução*. São Paulo: PUC-SP, 2002. p. 197–208.

MARCONDES, C. A.; GENTILL, N.; GRECO, S. E. *Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2003.

PAIVA, M. Matemática. Moderna, São Paulo, 2005.

POMMER, W. M. *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares*. São Paulo: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf>. Acesso em: 20 set 2015.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. *Matemática aula por aula: ensino médio*. São Paulo: Editora FTD, 2005. v. 1, 2 e 3.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática – ensino médio*. São Paulo: Editora Saraiva, 2005. v. 1, 2 e 3.