

RODAS OMNIDIRECIONAIS DE ROLOS DISPOSTOS A 45 GRAUS PARA ROBÔS MÓVEIS

YGOR BESSA SILVA, ROGÉRIO DA SILVA OLIVEIRA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), campus de Fortaleza
<ygorbsilva@gmail.com>, <rgoliveira@gmail.com>

Resumo. Foi desenvolvida neste trabalho uma roda omnidirecional com rolos dispostos a 45° em relação ao eixo da roda. A roda é composta de partes distintas, que foram usinadas com a ajuda de máquinas CNC (torno e fresa), sendo posteriormente montada. Uma compilação bibliográfica dos principais autores da área foi realizada para isso. O estudo das rodas omnidirecionais é o foco maior do trabalho. São abordados assuntos como: tipos de rodas utilizadas em robôs móveis, estudo da cinemática dos robôs móveis, geometria das rodas omnidirecionais e layout de robôs omnidirecionais. Os dados mostrados no trabalho facilitam a construção de uma roda omnidirecional, de tal forma que não se faz necessário um cálculo maçante das características dessas rodas. Pode-se realizar a construção das rodas de um robô móvel omnidirecional de forma simples, seguindo os cálculos propostos.

Palavras-chaves: Robô móvel, Rodas omnidirecional, Cinemática, Rodas especiais.

Abstract. An omnidirectional wheel with rollers arranged at 45 ° to the axis of the wheel was developed in this paper. The wheel is composed of distinct parts, which were milled in CNC machines (lathe and cutter), then being mounted. A bibliographical compilation of the main authors of the area was performed for that. The study of omnidirectional wheels is the main focus of this work. Some topics covered like: types of wheels used on mobile robots, study of the kinematics of mobile robots, omnidirectional wheels and layout of the omnidirectional robots. The data shown in the paper enables the construction of the omnidirectional wheels, without the necessity of a hard in the calculating of the characteristics of these wheels. The construction of the wheels of an omnidirectional robot can be achieved simply by following the proposal calculations.

Keywords: Mobile robot, Omnidirectional wheel, Kinematics, Special wheels.

1 INTRODUÇÃO

Robôs móveis com rodas (RMR) constituem uma classe de sistemas mecânicos caracterizados por restrições cinemáticas que não são integráveis e não podem, portanto, ser eliminadas das equações dos modelos matemático. Em consequência disso, os algoritmos de planejamento e controle padrão desenvolvidos para manipuladores robóticos sem restrições não são aplicáveis aos robôs móveis. Fato esse que deu origem “recentemente” a uma abundante literatura abordando a derivação de algoritmos de planejamento e controle, especialmente dedicados aos modelos cinemáticos simplificados e específicos como *trailerlike* (estilo *trailer*) ou *car-like* (estilo carro) RMR. No entanto, robôs móveis com rodas comerciais disponíveis no mercado têm geralmente uma estrutura física muito mais complexa que os modelos geralmente considerados (por exemplo, robôs com três ou quatro rodas motorizados de direção

e para os quais a modelagem (que muitas vezes é um pré-requisito para o planejamento do movimento e projeto de controle) ainda é uma questão relevante.

O objetivo do presente trabalho é apresentar de forma simplificada o processo de construção de uma roda omnidirecional, dando uma visão do problema encontrado na modelagem de RMR. Também se considerou um RMR geral, com um número arbitrário de rodas de vários tipos e várias formas de motorização. Tópicos como as propriedades estruturais e cinemáticas, levando-se em conta a restrição à mobilidade robô induzida pelas suas próprias limitações foram contemplados. Este trabalho foi iniciado a partir do trabalho realizado por Fernandes (2012).

2 FUNDAMENTAÇÃO

Com a introdução dos conceitos de grau de mobilidade e de grau de dirigibilidade, será mostrado que apesar da variedade de possíveis construções de robôs e configurações de rodas, o conjunto de RMR pode ser dividido em cinco classes. Em seguida, são apresentados quatro diferentes tipos de modelos de espaço de estado que são de interesse para a compreensão do comportamento de RMR.

- O modelo cinemático postura é o mais simples modelo de espaço de estado capaz de dar uma descrição global de RMR. Mostra-se que dentro de cada uma classes de robôs, esse modelo tem uma estrutura genérica particular que permite compreender as propriedades de manobrabilidade do robô. As propriedades de redutibilidade, controlabilidade e estabilidade do modelo são tratadas com mais detalhes, enfatizando sua importância no modelo.
- O modelo cinemático de configuração permite analisar o comportamento de RMR no âmbito da teoria de sistemas não-holonômicos.
- O modelo dinâmico de configuração é o modelo mais geral de espaço de estado. Dá uma completa descrição da dinâmica do sistema, incluindo forças generalizadas fornecidas pelos atuadores. Em particular, a questão da configuração da motorização é abordada: o critério proposto para verificar se a motorização é suficiente para explorar plenamente a mobilidade cinemática.
- O modelo dinâmico de postura, que é o equivalente à realimentação do modelo dinâmico de configuração, é útil para analisar sua redutibilidade, sua controlabilidade, e suas propriedades de estabilidade.

2.1 Postura do Robô

Conforme Dickerson e Lapin (1991), um veículo multidirecional é aquele capaz de se mover independente e simultaneamente nas três direções possíveis: longitudinal (frente e trás), lateral (esquerda e direita) e rotacionar. Logo, o sistema de controle deve ter no mínimo 3 graus de liberdade. Supondo que os robôs móveis em estudo neste trabalho são constituídos por uma estrutura rígida, equipada com rodas não deformáveis e que eles estão se movendo sobre um plano horizontal. A posição do robô no plano é descrita na Figura 1. Uma base arbitrária inercial ortonormal $\{0, \vec{I}_1, \vec{I}_2\}$ é fixa no plano do o movimento. Um ponto de referência arbitrário P no sistema e uma base arbitrária $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

em relação *chassis* são definidos. A posição do robô é completamente especificada pelas três variáveis x, y e θ (CAMPION; BASTIN; DANDREA-NOVEL, 1996; LAGES, 1998; SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

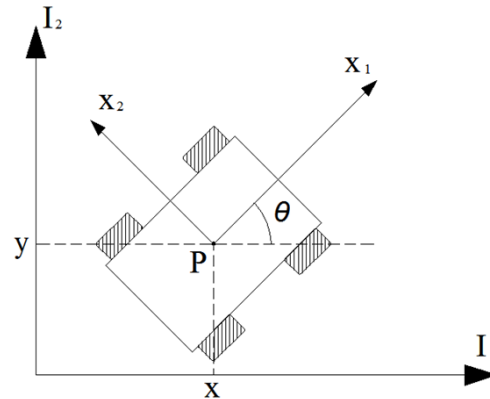


Figura 1: Definição de postura. Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004)

- x, y são as coordenadas do ponto de referência P na base inercial, ou seja,

$$\vec{OP} = x\vec{I}_1 + y\vec{I}_2; \quad (1)$$

- θ é a orientação da base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ com respeito à base inercial $\{\vec{I}_1, \vec{I}_2\}$.

Define-se o vetor ξ , que descreve a postura do robô:

$$\xi \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Conforme (HUANG; HUNG, 2013; JIANG; SONG, 2013; KIM; KIM, 2014; BARRETO et al., 2014) define-se a matriz de rotação ortogonal a seguir:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2 Descrição das Rodas

Segundo Campion, Bastin e Dandrea-Novell (1996) presume-se que, durante o movimento, o plano de cada roda permanece vertical e a roda gira em torno de seu eixo (horizontal), cuja orientação em relação ao *chassis* pode ser fixa ou variável. Pode-se distinguir entre duas classes básicas de rodas idealizadas: as rodas convencionais e as rodas suecas. Em cada caso presume-se que

o contato entre a roda e o chão é reduzido a um único ponto do plano.

Para uma roda convencional, o contato entre a roda e o chão é suposto para satisfazer o rolamento puro sem condição de escorregamento. Isto significa que a velocidade do ponto de contato é igual a zero e implica que os componentes desta velocidade paralela e ortogonal ao plano da roda são iguais à zero. Para uma roda de sueca, somente um componente da velocidade do ponto de contato da roda com o solo é, suposto, igual à zero ao longo do movimento. A direção deste componente zero da velocidade é arbitrária, *a priori*, mas é fixa com relação à orientação da roda.

A seguir serão derivadas explicitamente as expressões das restrições para as rodas convencionais e suecas (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004).

2.2.1 Rodas Convencionais

2.2.1.1 Rodas Fixas

O centro da roda, indicado A , é um ponto fixo do *chassis*, conforme Figura 2. A posição de A , na base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, é caracterizada usando coordenadas polares pela distância $PA = l$ e o ângulo α . A orientação do plano da roda em relação a PA é representada pelo ângulo constante β . O ângulo de rotação da roda em torno de seu eixo (horizontal) é denotado por $\varphi(t)$ e o raio da roda é denotado r .

A posição da roda, portanto, caracteriza-se por quatro constantes, α, β, l e r , e seu movimento por um ângulo $\varphi(t)$, variável no tempo. Com esta descrição, os componentes da velocidade do ponto de contato são facilmente calculados. Podem-se deduzir as seguintes restrições (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

- Ao longo do plano da roda

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l\cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0. \quad (4)$$

- Ortogonal ao plano da roda

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l\sin(\beta) \end{bmatrix} \cdot R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (5)$$

2.2.1.2 Rodas Orientáveis Centradas

A roda orientável centrada é tal que o movimento do plano da roda em relação ao sistema, é uma rotação em torno de um eixo vertical passando pelo centro da roda, Figura 2. A descrição é a mesma como para uma

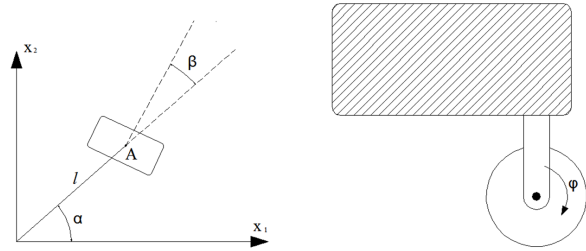


Figura 2: Roda fixa e roda orientável centrada. Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004)

roda fixa, mas agora o ângulo β não é constante, e sim variante no tempo. A posição da roda caracteriza-se por três constantes, α, l e r e seu movimento em relação ao sistema, por dois ângulos variantes no tempo, $\beta(t)$ e $\varphi(t)$. As restrições são expressas por (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l\cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0. \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l\sin(\beta) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (7)$$

2.2.1.3 Rodas Orientáveis Não Centradas (“Rodas Castor”)

Uma roda orientável não centrada é também uma roda orientável em relação ao *frame*, mas a rotação do plano da roda é em torno de um eixo vertical, que não passa pelo do centro da roda, como na Figura 3. Nesse caso, a descrição da configuração da roda requer mais parâmetros. O centro da roda é agora denotado B e está ligado ao quadro por uma haste rígida AB de comprimento constante d , que pode girar em torno de um eixo vertical fixo no ponto A . Esse ponto A é em si é fixo no *chassis* e sua posição é especificado pela coordenada polar l e α , conforme Figura 3. O plano da roda está alinhado com AB .

A posição da roda é descrita por quatro constantes, α, l, r e d , e seu movimento é caracterizado por dois ângulos variantes no tempo $\beta(t)$ e $\varphi(t)$. Com essas observações, as restrições têm o seguinte equacionamento (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l\cos(\beta) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta)d & l\sin(\beta) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0. \quad (9)$$

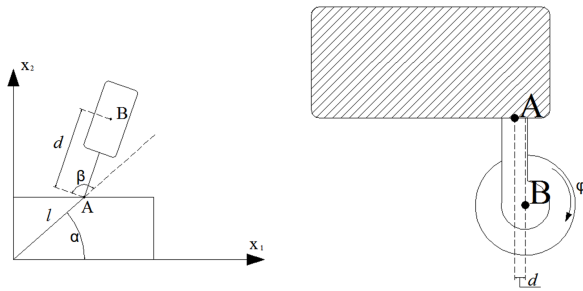


Figura 3: Roda orientável não centrada. Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004)

2.2.2 Rodas Omnidirecionais

A posição da roda em relação ao *frame* é descrita, assim como para a roda fixa convencional, pelos três parâmetros constantes, α , β e l . Um parâmetro adicional é necessário para caracterizar a direção, em relação ao plano da roda, do componente zero da velocidade do ponto de contato, representado pelo ângulo γ , conforme Figura 4. A restrição do movimento é dada por (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l\cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi} + r\cos\gamma\dot{\varphi} = 0. \quad (10)$$

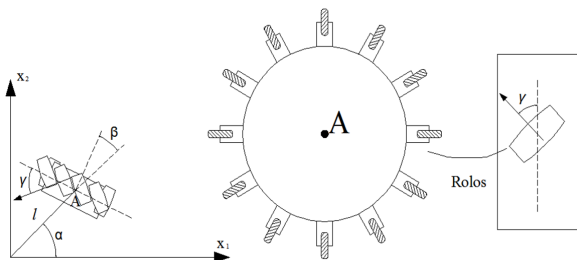


Figura 4: Roda omnidirecional. Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004)

2.3 Restrições a Mobilidade do Robô

Considerando um robô móvel em geral, equipado com N Rodas, das quatro categorias descritas anteriormente.

Usamos as quatro seguintes notações para identificar as quantidades de rodas relativas a estas quatro classes: N_f para a quantidade de rodas fixas convencionais, N_c para a quantidade de rodas convencionais orientáveis centradas, N_{oc} para a quantidade de rodas convencionais orientáveis não centradas, e N_{sw} para a quantidade de rodas suecas. Então $N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw}$.

A configuração do robô é totalmente descrita pelos seguintes vetores de coordenadas (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004).

- **Coordenadas de postura:**

$$\xi \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}.$$

- **Coordenadas angulares:** $\beta_c(t)$, orientação das rodas orientáveis centradas, e $\beta_{oc}(t)$, orientação das rodas orientáveis não-centradas;

- **Coordenadas de rotação:**

$$\varphi \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_c(t) \\ \varphi_{oc}(t) \\ \varphi_{sw}(t) \end{bmatrix}.$$

para os ângulos de rotação das rodas em torno do seu eixo horizontal de rotação;

- **Coordenadas de configuração:** O conjunto dos três tipos de coordenadas descritos acima é chamado de coordenadas de configuração. Conforme Campion, Bastin e Dandrea-Novel (1996), o número total dessas coordenadas é dado por $N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3$. Os coeficientes indicam a quantidade de coordenadas que cada determinado tipo de roda possui, por exemplo, cada roda não centrada possui duas coordenadas ($\beta_{oc}(t)$ e $\varphi_{oc}(t)$). O número 3 no final da equação representa a quantidade de coordenadas de postura, as quais são independentes da quantidade de rodas.

As equações de restrições de movimentos podem ser expressas da seguinte forma matricial genérica (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0; \quad (11)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_{oc} = 0. \quad (12)$$

Onde:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1sw} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$C_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2oc} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

J_{1f} , $J_{1c}(\beta_c)$, $J_{1oc}(\beta_{oc})$ e J_{1sw} são respectivamente matrizes $(N_f \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{oc} \times 3)$ e $(N_{sw} \times 3)$. J_2 é uma matriz constante $(N \times N)$, com a diagonal principal sendo composta pelos raios das rodas, exceto o raio da roda omnidirecional, que deve ser multiplicado por $\cos\gamma$.

C_{1f} , $C_{1c}(\beta_c)$ e $C_{1oc}(\beta_{oc})$ são respectivamente matrizes $(N_f \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{oc} \times 3)$. C_{2oc} é uma matriz diagonal cujas entradas são iguais a d para N_{oc} de rodas orientáveis não-centradas.

Considerando apenas o caso $(N_f + N_c)$, a equação 12 reduz-se a:

$$C_1^*(\beta_c)R(\theta)\dot{\xi} = 0, \quad (16)$$

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Implicando assim que o vetor $R(\theta)\dot{\xi}$ pertence ao espaço nulo da matriz $C_1^*(\beta_c)$, representado por

$$R(\theta)\dot{\xi} \in N[C_1^*(\beta_c)]. \quad (18)$$

A mobilidade de um robô móvel é determinada pelo posto da matriz $C_{01}^*(\beta_c)$, matematicamente $\varphi[C_1^*(\beta_c)]$. Além disso, $\varphi[C_1^*(\beta_c)] \leq 3$ se o posto for igual a 3 implica dizer que $R(\theta)\dot{\xi} = 0$, significando a impossibilidade de qualquer movimento no plano. Logo, para um robô móvel tem-se $\varphi[C_1^*(\beta_c)] \leq 2$. O δ_m como:

$$\delta_m = \dim N[C_{01}^*(\beta_c)] = 3 - \varphi[C_1^*(\beta_c)]. \quad (19)$$

Para o caso de $\varphi[C_{1f}] \leq 2$, o robô teria pelo menos duas rodas fixas com planos não-paralelos. Caso existam mais de duas rodas fixas, seus eixos devem ser concorrentes com o Centro Instantâneo de Rotação (CIR).

Esse centro é fixo uma vez que os planos das rodas não se dispõem de forma paralela, como mostra a Figura 5. Tem-se então que o único movimento possível é a rotação em torno desse ponto, inutilizando o robô na prática. Logo (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004)

$$\varphi[C_{1f}] \leq 1. \quad (20)$$

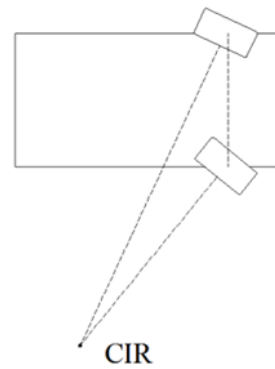


Figura 5: Centro instantâneo de rotação (CIR). Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004).

A equação 20, diz que para o caso do robô ter mais de uma roda fixa, elas precisam estar montadas no mesmo eixo.

Tem-se que $\varphi[C_1^*(\beta_c)] \leq \varphi[C_{1f}] + \varphi[C_{1c}(\beta_c)]$. Na situação em que $\varphi[C_1^*(\beta_c)] < \varphi[C_{1f}] + \varphi[C_{1c}(\beta_c)]$, os centros das rodas orientáveis estão sobre o eixo comum das rodas fixas, que faz com que as rodas orientáveis percam a capacidade de atuar sobre o Centro Instantâneo de Rotação (CIR). Portanto, para fins práticos, $\varphi[C_1^*(\beta_c)] = \varphi[C_{1f}] + \varphi[C_{1c}(\beta_c)]$.

O grau de dirigibilidade de um robô é definido pelo número de rodas orientáveis centradas que podem ser manobradas de forma independente. Representa-se por (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$\delta_s = \varphi[C_{1c}(\beta_c)]. \quad (21)$$

No caso de robôs que possuem o número de rodas orientáveis centradas maior que δ_s , o movimento das rodas excedentes precisa ser coordenado de forma a garantir a existência do CIR, $N_c - \delta_s$, determinadas pelas equações apresentadas no decorrer do trabalho.

De forma resumida, as configurações de rodas de um robô móvel devem respeitar as restrições (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$1 \leq \delta_m \leq 3; \quad (22)$$

$$0 \leq \delta_s \leq 2; \quad (23)$$

$$2 \leq \delta_s + \delta_m \leq 3. \quad (24)$$

Das restrições acima, deve-se atentar para alguns pontos importantes. O primeiro deles vem da inequação 22, de onde se conclui que são considerados apenas os casos em que o movimento é possível. Outro ponto considerável vem da inequação 23, que indica que podem existir apenas duas rodas orientáveis centradas independentes. Da inequação (24), tem-se que o limite superior implica em $\varphi[C_1^*(\beta_c)] \leq 2$, logo $\delta_s = 2$ implica em $\delta_m = 1$; configurações de rodas onde $\delta_s + \delta_m = 1$ resultam em robôs que realizam apenas rotação em torno do seu CIR, que será desconsiderado para fins práticos (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004).

Uma vez apresentadas essas restrições, podem-se dividir em cinco classes os robôs que apresentam utilidade prática, conforme será visto na próxima seção (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004).

2.4 Classes de Robô

As restrições 22, 23 e 24 permitem agrupar os robôs em cinco classes distintas, formadas pela combinação de grau de mobilidade e grau de dirigibilidade (δ_m, δ_s).

- Classe (3,0): São os robôs omnidirecionais. Apresentam mobilidade completa no plano, podendo realizar qualquer movimento no plano sem a necessidade de reorientar suas rodas. (Figuras 6(a) e 6(b)).
- Classe (2,0): São robôs que possuem uma roda orientável fixa, e caso haja mais de uma, elas devem estar concorrentes no mesmo eixo $\varphi[C_{1f} = 1$, portanto, $\varphi[C_1^*(\beta_c)] = \varphi[C_{1f}] + \varphi[C_{1c}(\beta_c)]$, com $\varphi[C_{1c}(\beta_c)] = 0$. Rodas devem ser acionadas de forma diferencial (Figura 6(c)).
- Classe (2,1) São robôs que possuem pelo menos uma roda orientável centrada, e caso haja mais de uma, seus movimentos tem de ser coordenados de forma a garantir $\varphi[C_{1c}(\beta_c)] = 1$ (Figura 7(a)).
- Classe (1,1): São robôs com uma ou mais rodas fixas no mesmo eixo, possuindo também rodas orientáveis centradas, desde que não estejam no mesmo eixo das rodas fixas. Caso haja mais de uma roda orientável centrada, a coordenação do movimento é necessária, de forma a garantir $\varphi[C_{1c}(\beta_c)] = 2$ (Figura 7(b)).

- Classe (1,2): São robôs com pelo menos 2 rodas orientáveis centradas, coordenação no movimento e $\varphi[C_{1c}(\beta_c)] = 2$. Não possuem rodas fixas (Figura 7(c)).

2.5 Modelo Cinemático de Postura

O modelo cinemático de postura serve para dar uma descrição global do robô. Da equação 16, pode-se chegar ao modelo em espaço de estados, dado por (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004):

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^T(\theta) \sum(\beta_c) \eta \\ \dot{\beta}_c = \varsigma \end{cases} \quad (25)$$

As variáveis do sistema são as coordenadas de postura ξ e angular β_c . As entradas lineares do sistema são η e ς . Um resumo dos tipos de robôs e seus modelos cinemáticos é apresentado na Tabela 1

Tabela 1: Modelos Cinemáticos de postura dos Robôs Móveis. Fonte: Lages (1998).

Tipo de Robô	Z	$\Sigma(\beta_c)$ ou Σ	Modelo cinemático de postura
(3,0) Omnidirecional	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$	Matriz Identidade	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$
(2,0) Diferencial	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$
(2,1)	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \beta_{c1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\sin(\beta_{c1}) & 0 \\ \cos(\beta_{c1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ \cos(\theta + \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$
(1,1)	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \beta_{c1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ L \sin(\beta_{c1}) \\ \cos(\beta_{c1}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \sin(\theta) \sin(\beta_{c1}) & 0 \\ L \cos(\theta) \sin(\beta_{c1}) & 0 \\ \cos(\beta_{c1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$
(1,2)	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \beta_{c1} \\ \beta_{c2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2L \sin(\beta_{c1}) \sin(\beta_{c2}) \\ L \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \\ \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L(\sin(\beta_{c1}) \sin(\theta + \beta_{c2}) + \sin(\beta_{c2}) \sin(\theta + \beta_{c1})) & 0 & 0 \\ L(\sin(\beta_{c1}) \cos(\theta + \beta_{c2}) + \sin(\beta_{c2}) \cos(\theta + \beta_{c1})) & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$

Uma vez definidos os modelos cinemáticos de postura dos robôs móveis, define-se o conceito de Grau de Manobrabilidade como (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004):

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s. \quad (26)$$

O grau de manobrabilidade fornece o número de graus de liberdade que podem ser influenciados diretamente pelas entradas de controle η e ς , ou seja, o CIR pode ser alocado livremente. Nos robôs da classe (3,0), tem-se $\delta_M=3$, então, o CIR pode ser alocado no plano através da entrada η . Nos robôs tipo (1,2) e (2,1), essa alocação no plano é feita através da reorientação das rodas centradas. Para o caso de $\delta_M = 2$, o CIR fica limitado ao eixo q passa no centro das rodas fixas. Robôs da classe (2,0) tem essa posição determinada por η ; já os robôs das classes (1,1), essa posição é determinada pela orientação das rodas fixas (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004).

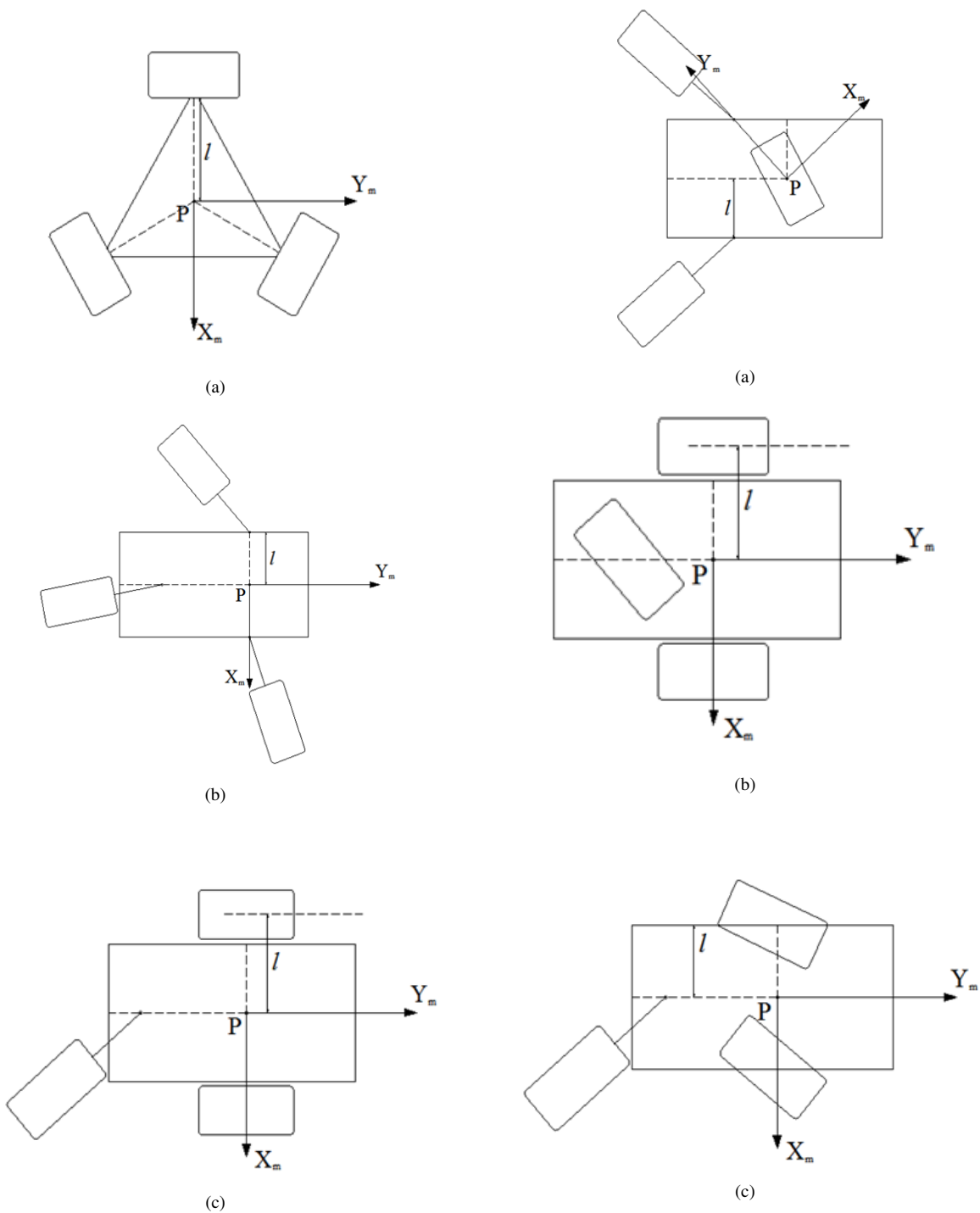


Figura 6: Classes de robô. (a) Classe (3,0) utilizando rodas omnidirecionais; (b) Classe (3,0) utilizando rodas orientáveis não centradas; (c) Classe (2,0) utilizando uma roda orientável não centrada e duas rodas fixas. Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004).

Figura 7: Classes de robô. (a) Classe (2,1) com duas rodas orientáveis não centradas e uma centrada; (b) Classe (1,1) utilizando duas rodas fixas e uma orientável centrada; (c) Classe (1,2) com duas rodas orientáveis centradas e uma não-centrada. Adaptado de Siegwart e Nourbakhsh (2004).

3 PROJETO DE UMA RODA OMNIDIRECIONAL

Para a construção da roda foram utilizados materiais disponíveis no mercado local, de tal forma a tornar-se mais acessível e prático. Como dito anteriormente, não foi utilizado um software de CAE para determinar os esforços limites de cada elemento, então, os materiais foram selecionados levando em consideração experiências passadas e empirismo.

A geometria dos rolos de uma roda é um omnidirecional é função do raio da roda (r); raio máximo do rolo (b) e ângulo do rolo. Por conveniência faz-se $r = 1$, simplificando o problema. Assim, b é adimensional e é a razão de b para R , caso utilize-se unidades. A geometria do rolo é descrita pelo seu raio r , como uma função da distância z_l , a partir do centro do rolo, como se segue (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004):

$$r = \sqrt{(x_l)^2 + (y_l)^2} \quad (27)$$

$$z_l = z(c \cdot \sin^2(e) + \cos^2(e)) \quad (28)$$

Onde,

$$x_l = z(c - 1) \cdot z \cdot \sin(e) \cdot \cos(e), \quad (29)$$

$$y_l = (c - 1)(1 - b), \quad (30)$$

$$c = (\sqrt{(1 - b)^2 + z^2 \cdot \sin^2(e)})^{-1}. \quad (31)$$

O conjunto de equações 27 - 31 é mostrado de forma simplificada. Quantizando z irá surgir o formato do rolo. Fazendo uma breve interpretação, o ponto (x_l, y_l, z_l) é um ponto na superfície do rolo, que também está na superfície da roda. Fazendo o sistema de coordenadas do rolo ter um de seus eixos passando pelo centro do sistemas de coordenadas da roda permite que o raio da roda, r , seja uma função de z , descrevendo completamente a geometria do rolo (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004).

É admitido, para o cálculo do máximo numero de rolos, que dois rolos adjacentes estão o mais próximo possível no plano que contém o centro da roda e é perpendicular ao eixo da roda. O rolo define uma área similar a de uma elipse no plano. Existe um ângulo λ que limita essa área elíptica. Logo,

$$N = \frac{360}{\lambda} \quad (32)$$

é o máximo número de rolos na roda. Uma vez que esse número N normalmente não é inteiro, sua parte inteira representa o máximo número de rolos; sua parte fracionária representa a soma das folgas entre rolos.

A necessidade de que exista um ponto do rolo em contato com o chão, diretamente abaixo do eixo, resulta num raio mínimo do rolo, e em uma espessura mínima da roda (Definida pelo final do eixo do rolo). A equação 33 mostra o cálculo da dimensão mínima do rolo.

$$\phi = \frac{360 \cdot \text{overlap}}{\text{parte inteira de } N} \quad (33)$$

Onde “overlap” sendo igual a 1 representa o contato de um único rolo com o chão; se o valor for entre 1 e 2, significa que em alguma posição da roda dois rolos estão em contato com o chão. Deve-se fazer esse valor de overlap ser igual a 1, garantindo que apenas um rolo entre em contato com chão por vez. Como consequência, o comprimento máximo do rolo é dado por

$$L_{MR} = \frac{2\sqrt{b(2-b)}}{\sin(e)}. \quad (34)$$

Isso gera uma largura máxima da roda de

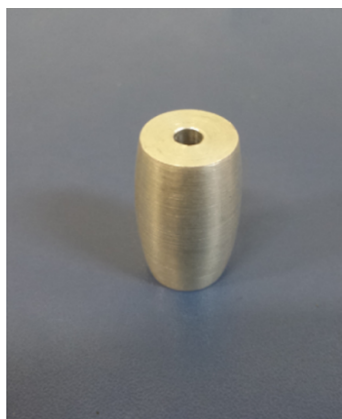
$$W_{MW} = L_{MR} \cdot \cos(e). \quad (35)$$

Lembrando que para as equações desenvolvidas nessa subseção, $r = 1$; as formulas são resultado direto de $c = 1$, na equação 31.

O modelo de projeto mostrado neste trabalho é uma simplificação do modelo proposto por Dickerson e Lapin (1991). Para o projeto, é necessário escolher dois valores: raio total da roda e quantidade de rolos da roda. Após uma pesquisa a respeito de que materiais seriam utilizados, levando em consideração as partes da roda, juntamente com o diâmetro do eixo de um motor utilizado para o acionamento, foi escolhido para a roda um raio total de 50 mm e a quantidade de 12 rolos. De posse desses valores, na coluna “Quantidade de rolos”, da tabela proposta pelo autor (Tabela 2), escolhe-se a linha cujo valor é 12,19823, significando assim 12 rolos, e o espaço somado de todas as folgas entre rolos é equivalente a 19,823% do espaço total de um rolo. Uma vez que se levou em consideração apenas rodas de raio unitário, devemos multiplicar todos os valores da linha da mesma tabela por 50, seguindo nossa escolha do raio total da roda. Assim tem-se:

Tabela 2: Parâmetros para cálculo de rodas. Fonte: adaptado de Dickerson e Lapin (1991).

CARACTERÍSTICA DOS ROLOS			
Raio Máximo	Raio Mínimo	Largura da roda	Nº de rolos
0,15500	0,12308	0,48524	12,64719
0,16000	0,12817	0,48390	12,19823
0,16500	0,12715	0,52691	11,77631



(a)



(b)



(c)

Figura 8: Peças usinadas. a) Rolo em alumínio; b) mancal de sustentação do rolo, em alumínio; c) peça central de sustentação de rolos e mancais, feita em poliacetal.

- Raio máximo do rolo: 0,16;
- Raio mínimo do rolo: 0,12817;
- Largura da roda: 0,48390.

Multiplicando os valores por 50, conforme dito anteriormente, vem:

- Raio total: 50 mm;
- Quantidade de rolos: 12 rolos;
- Raio máximo do rolo: 8 mm;
- Raio mínimo do rolo: 6,4085 mm;
- Largura da roda: 24,195 mm;
- Espaço entre cada rolo: 19,8% do espaço de um rolo.

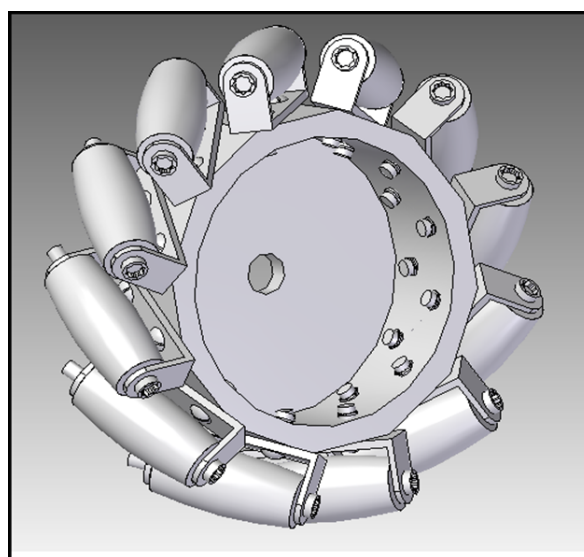


Figura 9: Proposta de uma roda omnidirecional.

A roda é constituída basicamente de três partes:

- A primeira parte é o bloco central onde todas as outras peças estão montadas. Foi confeccionado a partir de um tarugo de poliacetal (Figura 8(c));
- A segunda parte são os mancais de apoio que servem para apoiar os rolos. Foi confeccionada a partir de um perfil quadrado de alumínio (Figura 8(b));
- A terceira parte são os rolos, que foram desenhados fazendo aproximação por um toróide. Foi confeccionada em alumínio (Figura 8(a)).

Com essas informações e com o auxílio de um software de CAD 3D, pode-se construir o modelo da roda em um ambiente tridimensional (Figura 9).

4 DISCUSSÕES

Neste trabalho foi proposta uma pesquisa aplicada, dirigida à solução de um problema específico, relacionada à construção de uma roda omnidirecional. Há um cunho exploratório, uma vez que foi realizado um estudo acerca da modelagem da roda, levando em consideração suas características particulares e acionamento, de forma a ser realizado posteriormente o projeto, montagem e teste dessa roda.

Foi realizada, a princípio, a modelagem da roda especial em questão, mostrando suas particularidades, vantagens e desvantagens. Após a modelagem das rodas, foi apresentado o projeto da roda, em um ambiente de CAD 3D. Com o projeto em mãos, o próximo passo foi a confecção das partes da roda como auxílio de máquinas CNC (torno e fresa), onde foi introduzida a programação, realizado todo o processo de “zeramento” da máquina, escolha dos mandris, brocas e fresas a serem utilizados. Os limites desse torno foram cuidadosamente respeitados, para seu correto funcionamento e, conseqüentemente, a usinagem ocorra de acordo com o projeto. Após a confecção de todas as partes da roda, foram utilizados, de forma experimental, parafusos, arruelas e porcas para a fixação dos elementos, culminando na roda omnidirecional Figura 10.

Todo o processo de usinagem foi realizado no bloco da mecânica do IFCE. A montagem e os ajustes foram realizados nos laboratórios de Microcontroladores (LABOMICRO) e de Processamento de Energia (LPE), do IFCE. Na Figura 11 pode-se ver a forma como foi realizada a fixação da peça na mesa do torno CNC. O equipamento utilizado para centrar a peça a ser usinada e o cabeçote diferencial foi um relógio comparador.

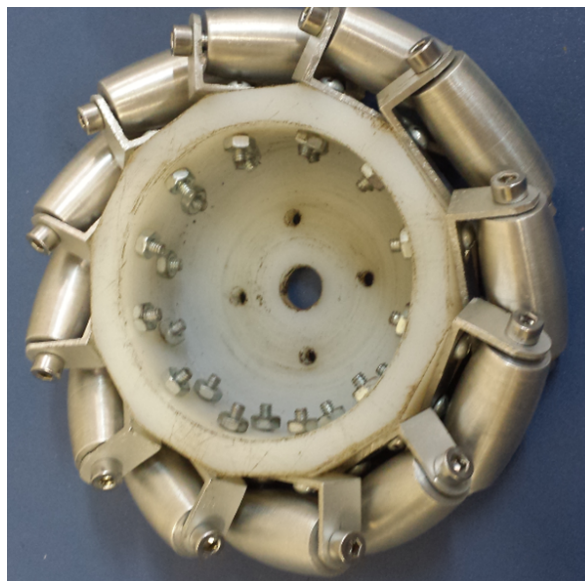


Figura 10: Roda omnidirecional montada.

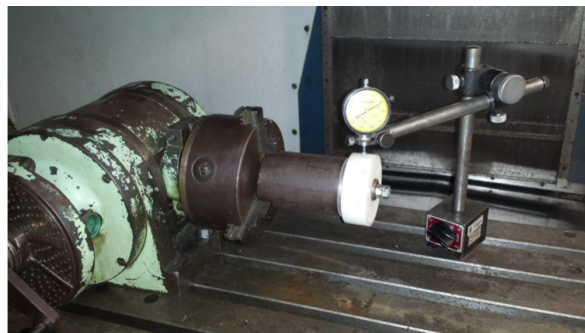


Figura 11: Peça fixada na mesa do torno CNC através de um cabeçote diferencial de discos; utilização de relógio comparador.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com as restrições à mobilidade, proveniente das limitações cinemáticas, os robôs móveis com rodas podem ser alocados em cinco classes diferentes, com estruturas particulares para os modelos cinemáticos e dinâmicos. O modelo cinemático de postura é um modelo genérico para a descrição da movimentação do robô. O modelo de cinemático de configuração, que descreve a evolução das variáveis de configuração. Os modelos de postura apresentados são genéricos, irreduzíveis e controláveis, sendo assim suficientes para o propósito de controle, em trabalhos futuros. Os modelos de configuração não são genéricos, podem ser reduzidos e não controláveis, dependendo da estrutura do robô; permitem descrever a evolução das configurações variáveis. Seguindo os modelos e tabelas sugeridos por Dickerson e Lapin (1991), pode-se contornar toda a parte trabalhosa do cálculo no projeto de uma roda omnidirecional, facilitando assim, juntamente com a ajuda de um *software* de CAD 3D, a construção de um modelo para a roda.

REFERÊNCIAS

BARRETO, J. C. S. L.; CONCEICAO, A. G. S.; DOREA, C.; MARTINEZ, L.; PIERI, E. R. D. Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, v. 19, n. 2, p. 467–476, April 2014. ISSN 1083-4435.

CAMPION, G.; BASTIN, G.; DANDREA-NOVEL, B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, v. 12, n. 1, p. 47–62, Feb 1996. ISSN 1042-296X.

DICKERSON, S. L.; LAPIN, B. D. Control of an omni-directional robotic vehicle with mecanum wheels. In: *Telesystems Conference*. Atlanta: [s.n.], 1991. v. 1, p. 323 – 328.

FERNANDES, F. E. J. *Estudo Teórico Sobre Rodas Aplicadas em Robôs Móveis*. Fortaleza: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, 2012. Monografia de Graduação em Tecnólogo em Mecatrônica Industrial. 88 f.

HUANG, J. T.; HUNG, T. V. *Singularity-Free Adaptive Control for Uncertain Omnidirectional Mobile Robots*. Taiwan: Institute of Digital Mechatronic Technology, 2013.

JIANG, S. Y.; SONG, K. T. *Differential Flatness-based Motion Control of a Steer-and-Drive Omnidirectional*

Mobile Robot. Taiwan: Institute of Electrical Control Engineering National Chiao Tung University, 2013.

KIM, H.; KIM, B. K. Online minimum-energy trajectory planning and control on a straight-line path for three-wheeled omnidirectional mobile robots. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, v. 61, n. 9, p. 4771–4779, Sept 2014. ISSN 0278-0046.

LAGES, W. F. *Controle e Estimação de Posição e Orientação de Robôs Móveis*. Tese (Doutorado em Ciência) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo, 1998. 180 f.

SIEGWART, R.; NOURBAKHSH, I. R. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. 1. ed. Massachusetts: MIT Press, 2004. 320 p.