

FAMÍLIA DE CURVAS PLANA E SUA ENVOLTÓRIA: VISUALIZAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), campus de Fortaleza
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
<fregis@ifce.edu.br>

Resumo. Equações Diferenciais Ordinárias - EDO constitui tópico compulsório no locus acadêmico. Determinados conceitos possuem bases de natureza complexa, entretanto, assume-se que, a visualização proporciona elementos tácitos e intuitivos que podem atuar, positivamente, no entendimento destes. Neste artigo, trazem-se alguns exemplos de tópicos estudados no contexto das EDO's. De modo particular, discutiremos alguns exemplos abordados em Figueiredo e Neves (2002), relativos às noções de famílias de curvas planas que representam as soluções de uma EDO. Por fim, mostraremos que o software viabiliza a visualização de conceitos relativamente complexos.

Palavras-chaves: EDO's. Curvas Planas. Envoltória, Visualização.

Abstract. Ordinary Differential Equations - EDO is compulsory topic in academic locus. Certain concepts have a base of a complex nature, however, it is assumed that the visualization provides intuitive and tacit elements which can act positively on the understanding of these. In this article, it brings up a few examples of topics studied in the context of EDO's. In particular, it discusses some examples covered in Figueiredo e Neves (2002), linked of the notions of the solutions of one EDO's families of plane curves. Finally, it shows that it enables the viewing of relatively complex concepts.

Keywords: EDO's, Plane curves, Envoltoria, Visualization.

1 Introdução

No estudo de equações diferenciais ordinárias - EDO's, deparamos teoremas de natureza reconhecidamente complexa, como também, conceitos vinculados a definições, de difícil significação imediata. Nesse contexto, restringir-nos-emos ao tópico de família de curvas planas (suas propriedades) e sua *envoltória*, que permite a extração de profícuas significações apoiadas na visualização e percepção de propriedades gráfico-geométricas. De modo intuitivo, ao tomar-se uma família de curvas dependentes de um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, chamar-se-á de *envoltória* como a curva que é tangente a todas as linhas que constituem a família de curvas a um parâmetro $f(x, y, \lambda) = 0$.

Não obstante, uma dada família poderá possuir uma *envoltória* ou mais de uma e, até mesmo, não admitir alguma *envoltória*. Montalban (2005, p. 5) fornece interessante representação que proporciona o entendimento da manifestação de um fenômeno físico, e que propiciou profunda discussão matemática no passado (KLINE, 1972; STILLWELL, 1997). Na Figura 1, esse autor indica ainda a manifestação de uma cáus-

tica, termo que, oriundo do grego, quer dizer “queima”. Montalban (2005, p. 5) observa que “todos os raios refletidos são sempre tangentes à cáustica.”

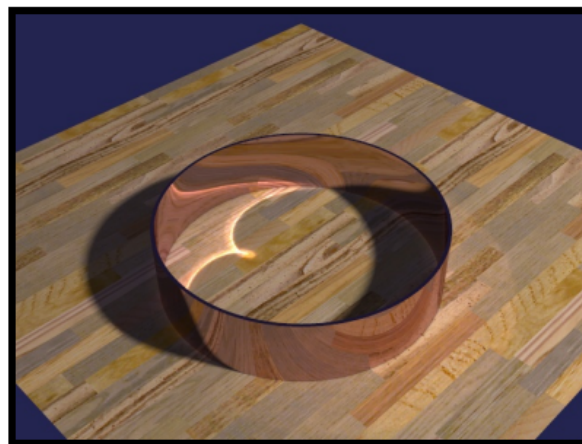


Figura 1: Montalban (2005) explica a noção de cáustica, emitida pela concentração de raios luminosos ao longo da *envoltória* de raios refletidos.

Na Figura 1 sublinhamos um exemplo relacionado com um conceito estudado no contexto de EDO. A visualização constitui componente fundamental nesse caso. Doravante, apoiar-nos-emos na tecnologia e, de modo particular, no *software* Geogebra, com a intenção precípua de explorar a visualização e o entendimento do comportamento gráfico-geométrico de construções elaboradas com o arrimo deste. Assim, imprimimos o apelo intuitivo e a possibilidade de um conhecimento tácito, relativo às situações particulares discutidas em Figueiredo e Neves (2002). Iniciamos, pois, a próxima seção, falando sobre EDO's exatas.

2 Estudo de equações diferenciais ordinárias e a noção de família de curvas

No estudo de equações diferenciais ordinárias, deparamos equações do tipo $N(x, y)y' + M(x, y) = 0$ (*) e, sob determinadas condições, envolvendo a classe de diferenciabilidade de suas funções componentes (M, N) , será exata, ou ainda, pode ser tornada exata, por intermédio de um fator integrante $\mu(x, y)$. Em boas condições, suas soluções são obtidas na forma implícita por uma equação $V(x, y) = c$ (cte). Tal equação pode ser interpretada como uma curva de nível no plano e, as soluções da EDO que indicamos em (*), passam por curvas de nível desta natureza.

A ideia da noção de curva de nível ou superfície de nível pode ser relacionada com outra noção. Com efeito, chamar-se-á de família de curvas a um parâmetro à seguinte equação (**) $f(x, y, \lambda) = 0$, onde $f: \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e $\Lambda \subset \mathbb{R}$ é um intervalo da reta.

Cabe observar que a equação $f(x, y, z) = 0$ pode ser descrita como uma superfície de nível zero da submersão f , quando o parâmetro λ é tomado, simplesmente, como coordenada z .

Tal modelo matemático possibilita questionamentos de ordem matemática, mas, também, de ordem epistemológica. Com efeito, colocamos as seguintes questões:

(i) dada uma família de curvas do tipo $f(x, y, \lambda) = 0$ a um parâmetro, existe uma EDO para a qual essa família representa solução?

(ii) dada uma EDO, podemos indicar uma família de curvas do tipo anterior, que constitui sua solução?

Buscaremos exemplificar cada um dos sentidos acima, descritos em cada alínea, por meio de exemplos particulares. Vamos considerar, então, de modo preliminar, a família de parábolas $f(x, y, \lambda) \equiv y - 2\lambda x^2 - \lambda = 0$, com $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. De imediato, verificamos que $f_x(x, y, \lambda) \equiv y' - 4\lambda x - 0 = 0 \Leftrightarrow y' - 4\lambda x = 0$. Não obstante, notamos que $y = (2\lambda x^2 + \lambda) \Leftrightarrow \lambda = \frac{y}{2x^2 + 1}$.

Por fim, escrevemos a seguinte EDO $(2x^2 + 1)y' - 4xy = 0$ ¹, da forma (*). Neste caso, dada uma família de curvas, obtivemos um EDO, cujo campo direções é descrito por $y' = f(x, y) = 4xy/(2x^2 + 1)$. Tal exemplo preenche o sentido indicado na primeira alínea. Com efeito, a família $f(x, y, \lambda) \equiv y - 2\lambda x^2 - \lambda = 0$ constitui um conjunto de soluções regulares (ver Figura 2).

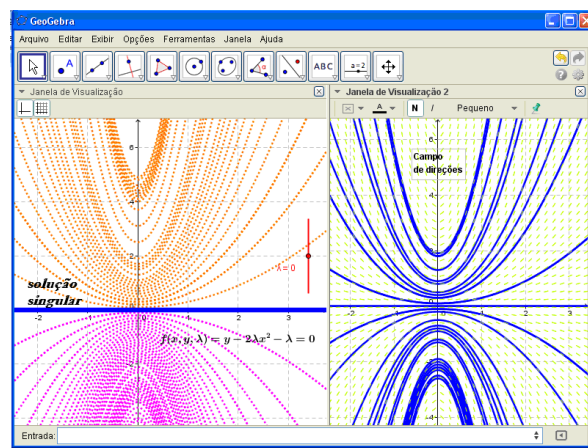


Figura 2: Família de parábolas a um parâmetro com recurso ao *software* Geogebra.

Vamos ressaltar, agora, que o procedimento anterior não garante o conhecimento de todas as soluções de uma EDO. Neste sentido, podemos considerar a família $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0$, oriunda da família de círculos de raio 1, dada por $x(t) = \lambda + \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí, derivamos a expressão $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0 \therefore f_x(x, y, \lambda) = 2(x - \lambda) + 2yy' = 0$. Ademais, escrevemos, pois, que: $(x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \lambda)^2 = 1 - y^2$. Por fim, eliminamos o parâmetro λ estabelecendo que $4y^2y'^2 = 4(x - \lambda)^2 = 4(1 - y^2) \rightarrow (1 - y^2) = y^2y'^2$. Finalmente, teremos que $y^2(1 + y'^2) = 1 \therefore y' = \pm\sqrt{1/y^2 - 1}$. Figueiredo e Neves (2002, p. 85) indicam ainda as soluções singulares da EDO anterior, que não foram incorporadas na resolução anterior. Assim, a família $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0$ constitui as soluções regulares de equação $y^2(1 + y'^2) = 1$, enquanto que $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ também satisfazem e são soluções singulares. Elas são visualizadas na Figura 3.

Na Figura 2 indicamos as soluções regulares e soluções singulares da EDO.

Outra noção discutida por Figueiredo e Neves (2002, p. 85) refere-se à *envoltória* de uma famí-

¹ Sendo $N(x, y) = (2x^2 + 1)y'$ e $M(x, y) = -4xy$.

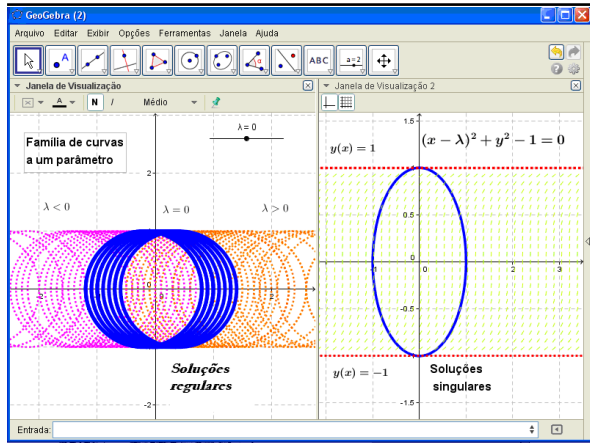


Figura 3: Família de círculos a um parâmetro com recurso ao software Geogebra.

lia de curvas C_λ . Neste sentido, consideremos uma família de curvas dada pela expressão (**). Admitiremos que, para cada a curva λ correspondente tem tangente, fato que implica que o vetor normal $(f_x(x, y, \lambda), f_y(x, y, \lambda)) \neq 0$, para todos os pontos em que (x, y, λ) e $f(x, y, \lambda) = 0$. Tais condições definem a *envoltória* da família que indicamos em (**), como sendo uma curva, em coordenadas paramétricas $(x(\lambda), y(\lambda))$, de modo que se tenham as duas condições: $f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$; e $x'(\lambda) \cdot f_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + y'(\lambda) \cdot f_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$ (***)

De modo sistemático, apenas enunciaremos os seguintes teoremas:

Teorema 1: A *envoltória* da família $f(x, y, \lambda) = 0$, onde $x = x(\lambda)$ e $y = y(\lambda)$ é a solução do sistema descrito por $\begin{cases} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \end{cases}$

Dem. Ver demonstração em Vilches (2009, p. 21 - 22).

Teorema 2: A condição suficiente para a existência de uma *envoltória* nos pontos regulares de uma família de curvas planas é que $f \in C^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \neq 0$ e que $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \lambda} \end{bmatrix} \neq 0$. Dem. Ver demonstração em Vilches (2009, p. 21 - 22).

Os dois teoremas supracitados permitem o entendimento dos próximos exemplos. Para tanto, vamos repetir a condição indicada no teorema 1 e tomar a família $\begin{cases} f(x, y, \lambda) = (x - 2\lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) = -4(x - 2\lambda) - \lambda = 0 \end{cases}$. Notamos ainda que $f_x(x, y, \lambda) = 2(x - 2\lambda)$ e $2yy' = 0 \therefore yy' - (2\lambda - x) = 0$. E fazendo as contas

a partir da equação $(x - 2\lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 = 0 \therefore x^2 - 4x\lambda + 4\lambda^2 + y^2 - \lambda^2 = 0$, indicamos ainda que $3\lambda^2 - 4x\lambda + (x^2 + y^2) = 0$. Nesse caso, indicaremos suas soluções por $\lambda_1 = \frac{(2 + \sqrt{x^2 - 3y^2})}{3}$ ou $\lambda_2 = \frac{(2 - \sqrt{x^2 - 3y^2})}{3}$ e, por fim, teremos o campo de direções $y' = \frac{(2\lambda - x)}{y} \rightarrow y' = f(x, y) = \left(\frac{4 + 2\sqrt{x^2 - 3y^2} - 3x}{3y} \right)$, definido apenas na região do plano $x^2 - 3y^2 \geq 0$ (ver Figura 4).

Para determinar sua *envoltória*, entretanto, da família descrita no parâmetro $f(x, y, \lambda) = (x - 2\lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 = 0$, realizamos ainda o seguinte procedimento: $f_\lambda(x, y, \lambda) = -2(x - 2\lambda) - \lambda = 0$. Daí se tem que $-2(x - 2\lambda) - \lambda = 0 \therefore -2x + 4\lambda - \lambda = 0 \leftrightarrow \lambda = \frac{2x}{3}$. Eliminando no sistema anterior, tal parâmetro, obteremos, por fim: $yy' = \left(\frac{4x}{3} - x \right) = \frac{x}{3} \therefore ydy = \frac{x dx}{3}$. Encontramos, pois, a seguinte equação $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{6} + K$ ou ainda $3y^2 = x^2 + K'$. Na Figura 4, fazendo $K' = 0$, exibimos duas *envoltórias* particulares, que na Figura 4, indicamos por $y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$. A família de todas as *envoltórias* da função está definida por $V(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{6} - K = 0$.

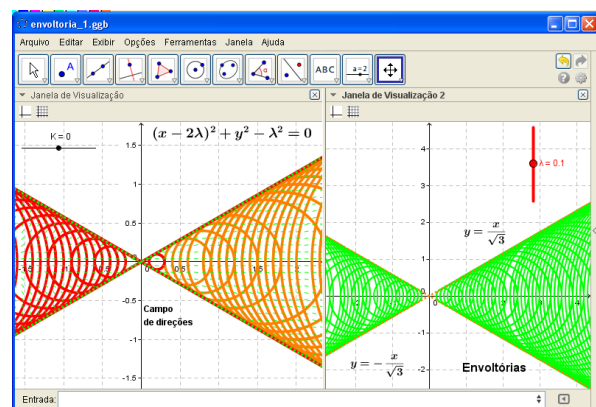


Figura 4: Visualização da *envoltória* de uma família de circunferências e seu campo de definição.

Figueiredo e Neves (2002, p. 87) apontam ainda a seguinte condição $f_x f_{\lambda y} - f_y f_{\lambda x} \neq 0$ (que corresponde ao determinante indicado no teorema 2) como sendo suficiente e necessária a existência de uma *envoltória* da família que designamos por $f(x, y, \lambda) = 0$. Neste sentido, os autores tomam o sistema: $\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$. Ora “a condição $f_x f_{\lambda y} - f_y f_{\lambda x} \neq 0$ nos garante, pelo Teorema das Funções Implícitas que existe uma solução $(x(\lambda), y(\lambda))$ desse sistema”. Isto quer dizer que se tem $f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$. Em seguida, derivamos

em relação ao parâmetro λ : $x'(\lambda) \cdot f_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + y'(\lambda) \cdot f_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + 1 \cdot f_\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$. Todavia, tendo em vista $f_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \therefore x'(\lambda) \cdot f_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + y'(\lambda) \cdot f_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$, que preenche a condição (**).

Vilches (2009, p. 23) comprova a propriedade, relativa à que, famílias de curva planas diferentes podem possuir a mesma *envoltória*. De fato, o autor considera a família $f(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) + y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda)$, com a seguinte condição $\sin(\lambda) \cdot \cos(\lambda) \neq 0$. Daí, determinamos a solução do seguinte sistema: $f(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) + y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) - y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(2\lambda) = 0$. Em seguida, orienta multiplicar a primeira por $\sin(\lambda)$ e a segunda por $\cos(\lambda)$. Dando prosseguimento, somando-se ambas as equações nesse sistema, obtemos que: $x = d \cdot \cos^3(\lambda)$ e $y = d \cdot \sin^3(\lambda)$. Buscaremos, pois, determinar a *envoltória* da família $f(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) + y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda)$, no parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ora, com base nas expressões $x = d \cdot \cos^3(\lambda)$ e $y = d \cdot \sin^3(\lambda)$, escrevemos: $f(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) + y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda) = 0 \therefore \frac{x}{\cos(\lambda)} + \frac{y}{\sin(\lambda)} - d = 0 \leftrightarrow \frac{x}{\left(\frac{x^{1/3}}{d^{1/3}}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{y^{1/3}}{d^{1/3}}\right)} - d = 0 \leftrightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$.

Por fim, determinamos a equação $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$ que constitui a *envoltória* da família a um parâmetro que indicamos por $f(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) + y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda)$. O autor não aponta, todavia, a EDO correspondente a tal família. Não obstante, derivamos a equação $f_x(x, y, \lambda) = \sin(\lambda) + y' \cdot \cos(\lambda) = 0 \therefore y' = f(x, y) = -\tan(\lambda)$.

Na Figura 5 notamos a família $f(x, y, \lambda) = x \cdot \sin(\lambda) + y \cdot \cos(\lambda) - d \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda)$ que descreve um conjunto de retas no plano. Evidenciamos uma reta, em cor vermelha nesta figura, que possui como trajetórias tangentes às curvas conhecidas como astroides.

Por outro lado, considera também a família de elipses $f(x, y, \lambda) = \lambda^{-2} \cdot x^2 + (1 - \lambda)^{-2} \cdot y^2 - d^2 = 0$, com $0 \leq \lambda \leq 1$. Repetimos o procedimento, e tomaremos o sistema $\begin{cases} f(x, y, \lambda) = \lambda^{-2} \cdot x^2 + (1 - \lambda)^{-2} \cdot y^2 - d^2 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = \lambda^{-3} \cdot x^2 - 1(1 - \lambda)^{-3} \cdot y^2 = 0 \end{cases}$. Encontraremos, pois, a expressão correspondente a $x^2 = \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^{-3} \cdot y^3$ e, substituindo na família inicial, obteremos, por fim, que $y^2 = d^2 \cdot (1 - \lambda)^3$ e $x^2 = d^2 \cdot \lambda^3$. Vilches (2009, p. 23 - 24) explica que se pode obter, mais uma vez, a equação a *astróide* $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$.

Vamos discutir e descrever com o Geogebra, mais um exemplo comentado por Vil-

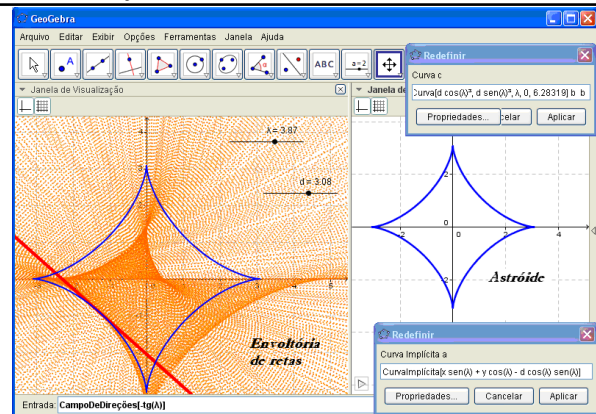


Figura 5: Vilches (2009, p. 23) exibe famílias de curvas a um parâmetro distintas com a mesma *envoltória* (a *astróide*).

ches (2009, p. 24). O autor considera $\begin{cases} f(x, y, \lambda) = (x^2 + (y - \lambda)^2) \cdot (x - 2) + x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -2(x - 2)(y - \lambda) = 0 \end{cases}$.

Fazendo as contas $(2y - 2\lambda - xy + \lambda x) = 0 \leftrightarrow \lambda(x - 2) = (xy - 2y) \therefore \lambda = \frac{(xy - 2y)}{x - 2}$. Substituindo na primeira equação: $(x^2 + (y - \frac{(xy - 2y)}{x - 2})^2) \cdot (x - 2) + x = 0 \leftrightarrow (x^2 + (y - \frac{(xy - 2y)}{x - 2})^2) \cdot (x - 2) + x = 0 \rightarrow x^4 \cdot (x - 2) + x = 0 \therefore x^5 - 2x^4 + x = 0$. Daí, podemos obter as raízes dessa equação. Por exemplo, os valores $x = 0$ e $x = 1$ designam pontos singulares nas trajetórias descritas pela família $f(x, y, \lambda) = (x^2 + (y - \lambda)^2) \cdot (x - 2) + x = 0$. Um modo preciso de ver isto, é determinar o vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \lambda), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda)\right) = (3x^2 - 4x + 1 + (y - \lambda)^2, 2(x - \lambda)(y - \lambda)) = (0, 0)$. Vilches (2009, p. 25) assinala que a reta $x = 2$ constitui uma assíntota vertical e não pertence a *envoltória* da família original, indicada há pouco no sistema. As curvas dessa família possuem um laço de interseção, nos pontos $(1, y) \in \mathbb{R}^2$ (que indicamos na Figura 6) ao lado direito. Omitiremos o teorema empregado por este autor que permite precisar, com maior exatidão, os pontos singulares da família $f(x, y, \lambda) = (x^2 + (y - \lambda)^2) \cdot (x - 2) + x = 0$, entretanto, conforme este autor, sua *envoltória* é apenas a reta vertical $x = 0$, que indicamos na Figura 6, ao lado direito.

Vamos considerar a família de círculos $f(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0$. Sabemos que $f_x(x, y, \lambda) = 2x + 2yy' = 0 \therefore F(x, y, \lambda) = x + yy' = 0$ que possui a família anterior como solução. Definiremos, pois, a seguinte função auxiliar, da seguinte maneira $G(x, y, \lambda) = F(x, y, -1/p) = y \cdot y' + x = (-1/y')y + x = 0 \therefore x \cdot y' - y = 0$.

Ademais, se tem que $y = xy'$. Não obstante, as

soluções desta última equação são descritas por retas $y = \mu x$, com $\mu \in \mathbb{R}$. Divisamos seu comportamento (das trajetórias ortogonais) na Figura 5. Vale acrescentar que a *envoltória* dessas soluções é constituída pela própria família de retas que indicamos por $y = \mu x$, com $\mu \in \mathbb{R}$.

De modo sistemático, a partir da família $f(x, y, \lambda)$, obtivemos sua EDO correspondente $F(x, y, y') = 0$. Em seguida, se define $G(x, y, p) = F(x, y, -1/p)$, como assim indicam os autores Figueiredo e Neves (2002). Por fim, investigamos as soluções de $G(x, y, y') = 0$ que possui como solução a família de curvas dadas por $g(x, y, \mu) = 0$, em que $\mu \in \mathbb{R}$. A última família de curvas a um parâmetro é uma *família ortogonal* à família inicial que indicamos por $f(x, y, \lambda) = 0$.

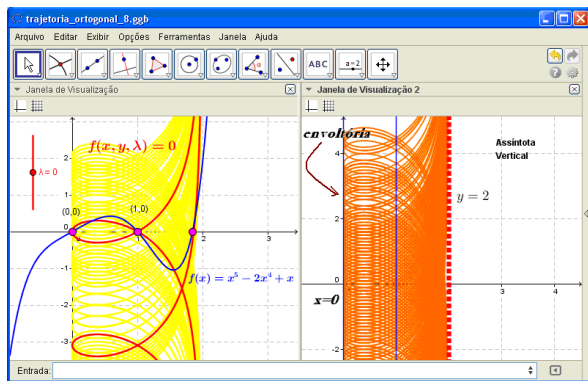


Figura 6: Identificamos os pontos singulares, retas assíntotas e a *envoltória* da família com o software Geogebra.

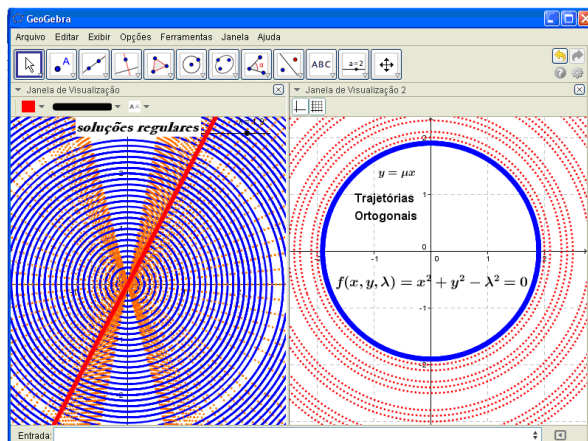


Figura 7: Trajetórias ortogonais de uma família de circunferências com o software Trajetórias ortogonais de uma família de circunferências com o software.

Antes de retornar aos nossos exemplos, vale assinalar que, do ponto de vista histórico, a descrição de trajetórias ortogonais constitui esforço e empenho de matemáticos no passado. Com efeito, Bassalo (1996, p. 330) comenta que:

Um outro tipo de problema que contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo foi o discutido por Leibniz e os irmãos Bernoulli, ainda na década de 1690. Com efeito, em 1694, Leibniz e John formularam o problema de encontrar a curva ou uma família de curvas que cortam uma outra família sob um ângulo determinado. John observou que a solução desse problema era importante para o entendimento da teoria ondulatória da luz, proposta por Huygens, em 1690.

A ideia perspectivada e assinalada no excerto acima, diz respeito ao comportamento de propagação dos raios de luz num meio não uniforme, uma vez que, tais raios são perpendiculares às frentes da onda luminosa. Bassalo (1996, p. 330) indica um exemplo atacado pelo próprio Leibniz, ao tomar a equação $y^2 = 2\lambda x$, com o parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Bassalo recorda que tal nomenclatura foi atribuída ao próprio Leibniz. Neste caso, escrevemos $f(x, y, \lambda) = y^2 - 2\lambda x = 0$.

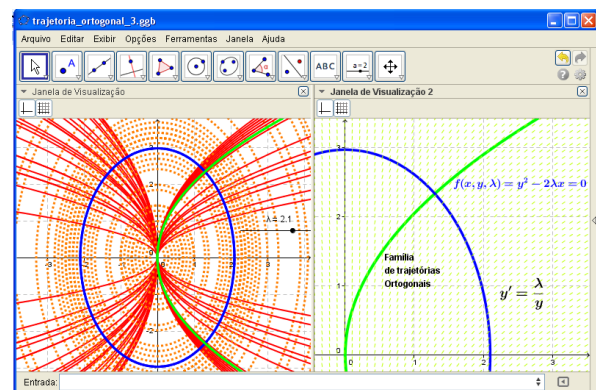


Figura 8: Problema resolvido por Leibniz, discutido em Bassalo (1996) e significado com o software.

Em seguida, Leibniz a derivou, obtendo $2y.y' = 2\lambda \therefore \lambda = y.y' = y \frac{dy}{dx}$. Segue, pois, que $y^2 = 2(y \frac{dy}{dx})x = 2xy \frac{dy}{dx}$. Por fim, ao integrá-las, obteve: $y^2 = 2xy \frac{dy}{dx} = -2xy.y' \therefore -2xy.y' - y^2 = 0$. Por fim, Bassalo (1996, p. 330) aponta a obtenção da seguinte equação $y^2 = -2xy \frac{dy}{dx} \therefore ydy = -2xdx$. Por fim, estabelecemos as curvas de nível $V(x, y) =$

² Sendo $N(x, y) = -2xy.y'$ e $M(x, y) = -y^2$.

$\frac{y^2}{2} + x^2 - c^2$, onde $K = c^2 \in \mathbb{R}$, que constituem as soluções regulares de EDO anterior. Na Figura 6, colocamos em destaque propriedades relativas às trajetórias ortogonais geradas por esta família.

Vamos tomar a seguinte família $f(x, y, \lambda) = y^2 + \lambda(1 - 2x^2) = 0$ e indicar uma outra equação diferencial ordinária, de modo que esta família constitua suas trajetórias ortogonais. Com efeito, repetimos o mesmo *modus operandi* assinalado anteriormente, e derivamos: $f(x, y, \lambda) = y^2 + \lambda(1 - 2x^2) = 0 \therefore f_y(x, y, \lambda) = 2y \cdot y' - 2x\lambda = 0$. Segue que $y \cdot y' - x\lambda = 0 \therefore \lambda = \frac{y \cdot y'}{x}$. Segue que $y^2 + \lambda(1 - 2x^2) = 0 \rightarrow y^2 + (\frac{y \cdot y'}{x})(1 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow xy^2 + y \cdot y' - 2x^2y \cdot y' = 0 \therefore xy^2 + (y - 2x^2y) \cdot y' = 0$. Ou seja, temos o seguinte campo das direções $xy^2 + (y - 2x^2y) \cdot y' = -\frac{xy^2}{(y - 2x^2y)}$. Reparemos, todavia, que a equação $(y - 2x^2y) \cdot y' + xy^2 = 0^3$.

Podemos, assim, obter as soluções desta equação descritas por $V(x, y) = x \cdot e^{-x^2 - y^2} - k = 0$. Aqui, indicamos as limitações do *software Geogebra*, que não produz equações descritas de modo implícito, em termos de outras funções, diferentes das polinomiais. Tal entrave pode ser contornado com o uso de *software* de computação algébrica, como o *MAXIMA* ou o *MAPLE*.

Para concluir, recordamos que, muitos problemas físicos manifestam propriedades, em que as trajetórias ortogonais (bem como outros tipos de trajetórias) estão presentes e modelizam o referido fenômeno. Neste sentido, recordamos que as curvas do fluxo do calor numa lâmina são ortogonais a família de curvas de igual temperatura (isotermas). Bem como as linhas do fluxo de um campo elétrico ou magnético são ortogonais as curvas equipotenciais.

Mas, consideremos a seguinte família $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - \lambda^2 + 1 = 0$. Seguiremos o modelo anterior para encontrar uma EDO que admite esta família de soluções. Derivando a expressão anterior, escrevemos: $x - \lambda + yy' = 0 \therefore \lambda = x + yy'$. Segue que $(x - x - yy')^2 + y^2 - (x + yy')^2 + 1 = 0 \therefore (yy')^2 + y^2 - x^2 - 2xyy' - (yy')^2 + 1 = 0$. Implica que $y^2 - x^2 - 2xyy' + 1 = 0 \therefore y' = f(x, y) = \frac{y^2 - x^2 + 1}{2xy}$. Por fim, de acordo com Figueiredo e Neves (2002, p. 90), impomos a condição da intersecção de duas curvas, num ponto, em que suas retas tangentes naquele ponto satisfazem $-\frac{1}{y'} = \frac{y^2 - x^2 + 1}{2xy} \therefore (y^2 - x^2 + 1)y' - 2xy = 0$ que é uma equação da forma (*). Com o fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$. Por fim, encontramos $g(x, y, \eta) = x^2 + (y + \eta)^2 - \eta^2 - 1 = 0$.

Na Figura 9, divisamos duas famílias de curvas a um parâmetro. Com relatamos anteriormente, deter-

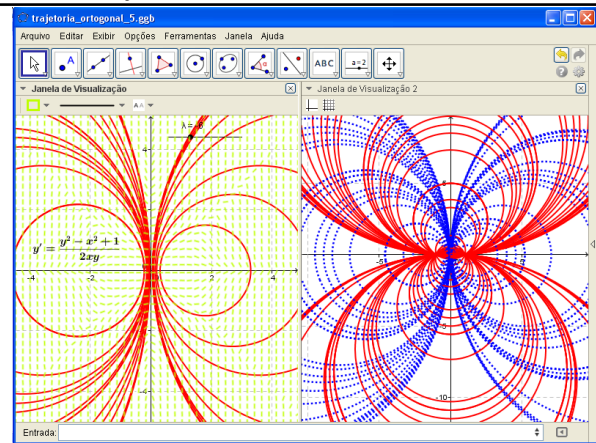


Figura 9: Comportamento gráfico-geométrico que descreve um fenômeno físico relativo ao comportamento dos campos.

minados fenômenos físicos podem ser descritos com base na noção dessas e outras famílias que se apresentam inviáveis com o uso deste *software*. Por exemplo, quando consideramos $x > 0$, por intermédio deste modelo, estudamos em Acústica o fenômeno de audibilidade. Vamos tomar, neste caso, a família de elipses $f(x, y, \lambda) = \lambda^{-2}x^2 + (1 - \lambda)^{-2}y^2 - d^2 = 0$ e, de modo semelhante, indicamos as astróides $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$ a sua *envoltória* correspondente.

Concluimos, acentuando um exemplo indicado por Vilches (2009, p. 30) ao discutir o comportamento de uma *envoltória* correspondente a família $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + (y + \lambda)^2 - R^2 = 0$ que pode ser verificado se constituir por equações do tipo $x + y = \pm R$. Na Figura 10, notamos um cilindro inclinado e, a partir da intersecção com os planos $\lambda = c$, conseguimos prever as projeções das curvas de nível obtidas por meio de cada intersecção, no plano \mathbb{R}^2 (ao lado esquerdo).

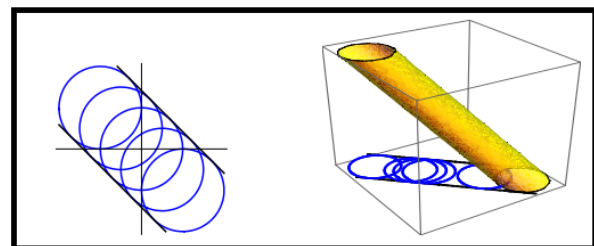


Figura 10: Vilches (2009, p. 30) discute o comportamento de uma *envoltória* a partir de projeção de um sólido tridimensional.

³Sendo $N(x, y) = (y - 2x^2y) \cdot y'$ e $M(x, y) = xy^2$.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Equações diferenciais ordinárias constituem estudo compulsório na academia. Deparamos certos conceitos que admitem um trato de natureza algébrica, bem como, profícuas significações gráfico-geométricas. Assim, patenteamos, ao discorrer neste escrito, situações que permitem romper um ritual, predominantemente de natureza algébrica e que, em determinados casos, se mostra inexequível, com vistas a uma descrição intuitiva, desprovida de tecnologia.

Outrossim, no processo que permeia o sentido da pergunta (i) e o sentido da pergunta (ii), exploramos a visualização, atinente ao comportamento de gráficos produzidos com o *software Geogebra*, por intermédio de comandos acessíveis, que não exigem conhecimento aprofundado em programação, entretanto, a preocupação didático-metodológica, que se consubstancia a partir do *design* de abordagem das situações problema em sala de aula (ALVES, 2013a; ALVES, 2013b). Outrossim, indicamos que as limitações deste software podem ser supridas com o uso de um *computer algebraic system*, como o *MAPLE* ou o *MAXIMA*.

Vale recordar, pois, a indicação de Figueiredo e Neves (2002, p. 49), ao comentarem que:

Em muitos problemas de aplicação não se faz necessário saber a expressão algébrica das soluções da equação diferencial. Basta saber propriedades dessas soluções, como por exemplo, seu comportamento quando x tende para algum valor pré-estabelecido. Com isto em vista, é interessante e importante estudar as propriedades geométricas da família de soluções da equação diferencial. Este é o outro problema básico do estudo das equações diferenciais, que pertence à chamada teoria qualitativa.

Não buscamos realizar aqui, um estudo qualitativo dos exemplos abordados, entretanto, alguns de elementos atinentes à teoria qualitativa foram visivelmente explorados, ao decorrer do trabalho, na medida em que, com arrimo nas figuras apresentadas, parafraseando os autores acima, estudamos e averiguamos propriedades geométricas da família de soluções a um parâmetro de um EDO e sua respectiva *envoltória*.

Por fim, outro fato que não pode deixar de ser mencionado, refere-se ao viés com que deparamos o ensino de EDO's já há algumas décadas criticado (TALL, 1986). Neste sentido, trabalhos (ARSLAN, 2005; ASAGLAM, 2004) realçam os aspectos negativos condicionados por um ensino que prioriza o quadro analítico, em detrimento da abordagem geométrica ou numérica.

Deste modo, nos alinhamos ao pensamento e Figueiredo e Neves (2002, p. 92), quando advertem que “a solução de um problema não é apenas uma fórmula ou uma função, mas antes, algo pleno de significado e de informações sobre o fenômeno que estamos considerando.”

REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V. Situações didáticas envolvendo a interpretação geométrica do teorema da função implícita. In: *Anais do VII Congresso de Educação Matemática*. Montevideu: [s.n.], 2013. p. 1 – 8. Disponível em: <<http://www.cibem7.semur.edu.uy/home.php>>.
- _____. Visualização no contexto de ensino de equações diferenciais ordinárias: o uso dos softwares geogebra e do cas maple. In: *Anais Brazilian Conference of Geogebra*. Montevideu: [s.n.], 2013. p. 1 – 12. Disponível em: <<http://www.geogebra.institute-rn.com.br/>>.
- ARSLAN, S. *L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?* Tese (thèse de doctrat) — Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005. 287 f. Acessado em: 2 de ago. 2013. Disponível em: <<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/81/81/PDF/tel-00009594.pdf>>.
- ASAGLAM, A. *Les Équations Differentielles em Mathématiques et en Physique*. Tese (Thèse de doctorat) — Université Joseph Fourier, Grenoble, 2004. 264 f.
- BASSALO, J. M. A crônica do cálculo: contemporâneos de newton e leibniz. *Revista Brasileira do ensino de Física*, v. 18, n. 4, p. 328 – 336, 1996. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbepf/pdf/v18a34.pdf>>.
- FIGUEIREDO, D.; NEVES, A. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- KLINE, M. *Mathematical thought: from ancient and modern times*. New York: Springer, 1972.
- MONTALBAN, J. O. J. *Caustica por reflexão e teoria das catástrofes*. Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <<http://www.pg.im.ufrj.br/teses/Aplicada/064.pdf>>.
- STILLWELL, J. *Mathematics and its History*. New York: Springer, 1997.

TALL, D. Lies, damm, lies and differential equations.

Mathematic Teaching, n. 114, p. 54 – 57, 1986.

Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1986k-diff-equns-mt.pdf>>.

VILCHES, M. A. Envoltórias de curvas planas.

Cadernos do IME, v. 21, n. 3, p. 1 – 32, 2009.

Acessado em: 7 de agosto de 2014. Disponível em:

<http://magnum.ime.uerj.br/cadernos_mat/cadmat_arquivos/V2021/cime.pdf>.

VILLATE, J. *Introdução aos sistemas dinâmicos:*

uma abordagem com o MAXIMA. Porto: Editora

Universitária, 2007.