ENSINO DE ÁLGEBRA ABSTRATA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE MAPLE: GRUPOS SIMÉTRICOS S_n

FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES [1] ANA GLEICEANE DIAS DE ARAUJO

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
Campus de Fortaleza
Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica CEP: 60040-215 - Fortaleza - CE
[1]<fregis@ifce.edu.br>

Abstract. In this paper, it is developed a method of research known as content analysis taking as its theme the approach to the use of software CAS Maple which is a tool to the teaching of Abstract Algebra. In this study, it is pointed out some examples of group structure applications, particularly the symmetric groups, symbolized by S_n. The Maple software works on various branches of Mathematics, particularly in Abstract Algebra. The program has a package named group, which allows the users to perform various operations with symmetric groups S_n. Given a permutation group, it is possible from the package group to calculate its order $|G|$, list all its elements; find the parity of a permutation given; determine whether G is abelian; view a permutation as a product of cycles disjoint; determine the inverse of a permutation α^{-1} and other operations. Based on the situations discussed, we indicate potential elements which establish a link between the use of the program and the teaching of this subject in the classroom.

Keywords: Abstract algebra; Software Maple; Teaching; Symmetric groups

Resumo. Desenvolve-se neste artigo um design de investigação, conhecido como análise de conteúdo envolvendo um tema relativo à abordagem sobre o uso do *software* CAS Maple para o ensino de Álgebra Abstrata. Apresentam-se exemplos de aplicações no caso da estrutura de grupo, em especial os grupos simétricos, simbolizados por S_n. O *software* Maple proporciona a realização de aplicações em vários ramos da Matemática, de modo particular na Álgebra Abstrata. O referido programa possui um pacote denominado *group*, que permite efetuar diversas operações com os grupos simétricos S_n. Dado um grupo de permutações G é possível, a partir do pacote *group*, calcular sua ordem $|G|$; listar todos os seus elementos; encontrar a paridade de uma permutação dada; determinar se G é abeliano; exibir uma permutação como um produto de ciclos disjuntos; determinar a inversa de uma permutação α^{-1} , dentre outras. Com base nas situações discutidas, indicam-se elementos que detêm o potencial de envidar a transposição didática em sala de aula para o ensino deste conteúdo.

Palavras chaves: Álgebra abstrat; *Software* Maple; Ensino; Grupos simétricos

1 Introdução

O presente artigo apresenta uma proposta de abordagem sobre o uso do software Maple no ensino da disciplina de Álgebra Abstrata dos cursos de Licenciatura em Matemática, tendo como objeto de estudo os exemplos de aplicações envolvendo os grupos simétricos simbolizados por S_n .

Partimos do ponto de vista que cada vez mais as tecnologias digitais, como o uso do computador, estão presentes no ambiente educacional e, nesse sentido, Valente (1993) explica que "na educação o computador tem sido utilizado tanto para ensinar sobre computação - ensino de computação ou *computer literacy* - como para ensinar praticamente qualquer assunto - ensino através do computador". Além disso, levamos em consideração que o Maple trata-se de um programa computacional de fácil[1] utilização, por possuir uma linguagem simples e direta, podendo, desta forma, ser levado para a sala de aula.

No artigo intitulado Grupos de Permutações com o Maple, Andrade (2003) mostra através de vários exemplos, como o Maple pode ser usado em situações que envolvam os grupos de permutações. Tais exemplos podem proporcionar significações diferenciadas, por exemplo, na disciplina de Álgebra Abstrata, a qual

[1]Refere-se apenas ao pacote group do *software* Maple.

proporciona o contato do graduando em Matemática com conceitos abstratos e que detêm, até certo grau, um caráter de ineditismo. Neste sentido, para Franco (2011, p.31) "em Álgebra, conceitos como anéis e grupos tendem a ser complexos para os estudantes, haja vista a necessidade de abstração e representação exigidas para a compreensão dessas estruturas matemáticas". De acordo ainda com Dubinsky et al. (1994 apud ALBUQUERQUE, 2005, p. 19), existem pesquisas na literatura que "confirmam que a teoria dos grupos é vista por professores e alunos em grande maioria como um dos assuntos mais difíceis da graduação."A partir destas reflexões, decidimos elaborar este artigo.

O problema central deste artigo consiste, então, em propor o uso de uma ferramenta que auxilie na compreensão dos conceitos e resultados que constituem a teoria dos grupos por parte de alunos do curso de Licenciatura em Matemática. No nosso caso, apoiaremos nossas argumentações com referência ao uso do *software* Maple.

Apresentaremos uma possibilidade de contribuição para o ensino da disciplina Álgebra Abstrata a partir de nossas investigações a respeito do uso do *software* Maple no caso dos grupos simétricos S_n, vislumbramos que este *software* possa ser concebido como uma ferramenta auxiliar para uso de professores e alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Os resultados teóricos apresentados neste artigo foram obtidos com base nas etapas de investigação previstas em um *design* da metodologia conhecida como análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). A razão da escolha desta metodologia teve origem no fato de estarmos numa etapa preliminar de investigação. Desta maneira, restringir-nos-emos a uma ação investigativa que não contempla dados empíricos.

Desse modo,veremos neste artigo que o *software* Maple permite algumas aplicações com os grupos simétricos S_n . Com o *software* Maple é possível realizar desde tarefas mais simples por exemplo escrever uma permutação como produto de ciclos disjuntos, como também, realizar tarefas sofisticadas, tais como decidir se um determinado grupo simétrico S_n é normal, de maneira que todas estas tarefas sejam realizadas com o empenho de um menor tempo do que o necessário quando efetivadas sem o auxílio de um recurso computacional, com arrimo aos instrumentos lápis e papel.

Ao final desta investigação, pretendemos verificar se o *software* Maple pode se visto como uma ferramenta eficiente e poderosa para tornar as aulas diferenciadas, auxiliando no ensino da disciplina de Álgebra Abstrata. Iniciaremos nossa discussão fazendo uma síntese histórica sobre a descoberta e construção do conceito de grupo abstrato com o intuito de mostrar sua importância para a Matemática. Em seguida, após delimitar alguns conceitos básicos da teoria dos grupos necessários para o entendimento do nosso trabalho, exibiremos exemplos de aplicações obtidos com o *software* Maple.

2 METODOLOGIA

Organizamos o nosso estudo de acordo com as três etapas de investigação prevista por Bardin (1977), no que concerne a metodologia nominada análise documental. As referidas etapas são constituídas por pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados, seguidos da inferência e interpretação.

De modo preliminar, foi realizada uma leitura de documentos que permitiu um primeiro contato com o tema deste artigo, proporcionando uma análise e conhecimento dos textos, que foi se tornando mais sucinta à medida que foram consideradas aplicações em outros materiais semelhantes, como por exemplo, o uso do Maple em outros ramos da Matemática como o Cálculo Diferencial e Integral em Uma a Várias Variáveis (ALVES, 2012; ALVES, 2013). Foi possível, nesta fase da pré-análise compreender o uso do Maple como uma ferramenta que pode ser utilizada num ambiente de sala de aula.

Em seguida, partimos para a escolha do material a ser utilizado em nossa análise que, no nosso caso, se deu a partir do objetivo ensejado. Nesta fase da pré-análise, Bardin (1977, p. 96) sugere que depois que o universo de documentos é demarcado, deve-se considerar a constituição de um *corpus* que ele define como sendo "o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos". Bardin (1977, p. 97) assinala ainda que para a constituição de um *corpus* devem ser consideradas as seguintes regras: regra da exaustividade; regra da representatividade; regra da homogeneidade e, por fim, a regra da pertinência.

O universo de documentos que demarcamos constitui-se de artigos acadêmicos (ANDRADE, 2003), livros de introdução à Álgebra Abstrata (GONCALVES, 2012), bem como seu papel na história da Matemática (BOYER, 1974), livros de instrução sobre o uso do Maple e sítios eletrônicos que tratam deste software. Posteriormente, obedecendo às regras da constituição do *corpus*, adotamos a seguinte sistemática:

- *Regra da exaustividade*: consideramos os vários textos que abordavam o *software* Maple como ferramenta auxiliar para o ensino de Matemática. Além dos textos que faziam menção às aplicações deste *software* na Álgebra Abstrata e livros que tratam desta área da Matemática.

- *Regra da representatividade*: de acordo com esta regra podemos realizar a análise a partir uma amostra do material se este se prestar a essa possibilidade. Em nosso estudo, demos mais atenção ao material referente ao uso do Maple na Álgebra Abstrata mantendo nosso foco para as aplicações deste *software* no caso dos grupos simétricos , que constituem um caso específico desta área da Matemática, mas que podem auxiliar na compreensão de outras estruturas algébricas uma vez que englobam vários conceitos importantes da teoria dos grupos. Além disso, os grupos simétricos são considerados como uma das estruturas algébricas mais importantes dentre os grupos.

- *Regra da homogeneidade*: Em nosso estudo, os documentos submetidos para a análise obedecem também a esta regra que recomenda a escolha a partir de critérios precisos e que não apresentem singularidade fora destes critérios. Em outras palavras, os documentos por nós retidos giram em torno do Maple como ferramenta auxiliar no ensino da Álgebra Abstrata.

- *Regra da pertinência*: Bardin (1977, p. 98) evidencia que esta última regra nos permite considerar os documentos que equivalem ao objetivo que suscita a análise. No nosso caso, podemos destacar que os documentos retidos a respeito do uso do Maple contribuíram para nosso objetivo esperado.

Dentro da pré-análise, encontramos também a fase de formulação de hipóteses e objetivos. Em nosso estudo não nos apoiamos em hipóteses levando-se em consideração que "não é obrigatório ter-se como guia um *corpus* de hipóteses, para se proceder à análise"(BARDIN, 1977, p. 98). Quanto ao nosso objetivo, este consiste em investigar como o uso do Maple pode ser tomado como uma ferramenta auxiliar para o ensino da disciplina de Álgebra Abstrata no caso dos grupos simétricos S_n.

Ainda na pré-análise, contamos com a fase de referenciação dos índices e a elaboração dos indicadores. Esta fase, conforme Bardin (1977, p. 99), se dá em função das hipóteses, caso tenham sido determinadas *a priori*, isto é, quando considerados os textos como uma manifestação de índices que irão tornar a análise expressiva, estes devem ser escolhidos e organizados em indicadores. Em nosso estudo, tais índices corresponderam à fácil utilização do pacote *group* do *software* Maple, reforçando o objetivo ao qual direcionamos nosso olhar. Quanto aos indicadores, contamos principalmente com a linguagem que o *software* utiliza e o tempo decorrido durante a execução dos comandos.

Finalmente, concluímos esta etapa da pré-análise com a fase da preparação do material. Bardin (1977, p. 100) esclarece que "trata-se de uma preparação material e, eventualmente, formal (edição)". Pensando nisto, reescrevemos tudo aquilo que seria utilizado em nossa produção textual, levando em conta ainda o que Bardin (1977, p. 101) recomenda sobre o tratamento informático quando diz que "os textos devem ser preparados e codificados segundo as possibilidades de leitura do ordenador e segundo as instruções do programa".

Concluída a pré-análise, passamos para a segunda etapa: a exploração do material. Segundo Bardin (1977, p. 101) deve-se, aqui, administrar sistematicamente as decisões tomadas na etapa anterior. Dessa forma, procuramos estabelecer uma organização a respeito daquilo que seria levado em consideração: no contexto histórico; nos conhecimentos necessários para a compreensão das aplicações do Maple na Álgebra Abstrata, bem como ainda, as informações relevantes sobre a apresentação do Maple e comandos específicos.

Na terceira etapa de nossa investigação, realizamos o tratamento dos resultados obtidos e interpretação. Nossos resultados referem-se aos exemplos de aplicações do *software* Maple no caso dos grupos simétricos S_n, tais exemplos foram analisados e interpretados partindo do possível pressuposto de que poderiam ser abordados em sala de aula, com vistas ao ensino de um curso introdutório de Álgebra Abstrata. Ainda nesta etapa, Bardin (1977, p. 101) afirma que "o analista poderá ainda realizar inferências caso tenha à disposição resultados significativos". Em relação a isto, consideraremos que, diante da simplicidade da utilização do pacote *group* do *software* Maple, poder-se-ia também pensar na utilização deste *software* em sala de aula.

3 CONTEXTO HISTÓRICO

As contribuições para a descoberta e construção do conceito de grupo abstrato se deram por parte de vários matemáticos dentre os quais podemos destacar Leonhard Euler (1707 - 1783), Joseph L. Lagrange (1736 - 1813), Karl. F. Gauss (1777 - 1855), Niels H. Abel (1802 - 1829), Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) e Arthur Cayley (1821 - 1895), mas segundo Boyer (1974, p. 432) as que mais se sobressaem se devem a Évariste Galois (1811 - 1832). Galois não teve seu trabalho reconhecido em vida, somente anos após sua morte suas descobertas vieram a público dando origem ao que hoje conhecemos como Teoria de Galois.

De acordo com Boyer (1974, p. 433) "Galois iniciou seus estudos a partir dos trabalhos de Joseph L. Lagrange sobre permutação de raízes de uma equação polinomial". Lagrange, por exemplo, havia demonstrado que a ordem de um subgrupo divide a ordem de um grupo.

E. Galois ficou impressionado com a demonstração de Niels H. Abel sobre a irresolubilidade de uma equação de grau cinco e desenvolveu a ideia de grupo ao descobrir "que uma equação algébrica irredutível é resolúvel por radicais se e só se seu grupo é resolúvel"(BOYER, 1974, p. 433).

Outros vários matemáticos também deram significantes contribuições para o desenvolvimento do conceito de grupo. De acordo com Katz (1998 apud BUSSMANN, 2009, p. 38), as primeiras noções sobre grupo tiveram origem nos trabalhos de Leonhard Euler que em seu Tratado da Doutrina dos Números de 1750, define o conceito de congruência módulo, e percebe que ao dividir um número a por um número d existem d possibilidades para o resíduo r, que podem ser separados em classes de restos. "[...] as ideias básicas da teoria de Grupos são evidentes na discussão de resíduos, desenvolvidas por Euler, de uma série em uma progressão aritmética $0, b, 2b, ...$, [...]"(KATZ, 1998, p. 618).

Além de Euler, podemos mencionar ainda os trabalhos de Lagrange, que segundo Milies (2004, p. 39) foi quem iniciou os primeiros estudos sobre permutações em suas pesquisas sobre resolução de equações algébricas em 1770, e os de Niels H. Abel, que deu continuidade a pesquisa de Lagrange. De acordo com Eves (2011, p. 533) "Abel publicou um famoso artigo em 1824, onde demonstrou que as equações de grau cinco não tinham solução por meio de radicais, resolvendo, dessa maneira, um problema que ocupara por séculos tantos outros matemáticos".

Boyer (1974, p. 433) sublinha que Gauss estabeleceu a solução para a equação $a_n x^n + a_n = 0$ em termos de operações racionais e raízes quadradas dos coeficientes em seus critérios para construção de polígonos regulares, e que este resultado foi mais tarde generalizado por Galois, que forneceu critérios para a resolubilidade da equação $a_0 x^n + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)} x + a_n = 0$ em termos de operações racionais e raízes n-ésimas de seus coeficientes. Boyer (1974, p. 433) acrescenta ainda que "Galois tinha como principal objetivo determinar quando uma equação polinomial tinha solução por meio de radicais".

Milies (2004, p. 39) evidencia que Augustin Louis Cauchy foi quem percebeu a importância da ideia de grupo de permutações desenvolvida por Galois, tendo escrito vários artigos a respeito entre o período de 1844 - 1846. De acordo ainda com Milies (1992 apud BUSSMANN, 2009, p. 41) Cauchy definiu permutações cíclicas, transposições, produto de duas substituições e grau de uma substituição, e inclusive uma notação para permutações utilizada até hoje. Os trabalhos de Cauchy serviram de inspiração para Arthur Cayley.

Milies (2004, p. 39) explica que o matemático que deu a primeira definição de grupo foi Arthur Cayley (1821-1895), salientando ainda que Cayley "sabia ver a generalidade por trás dos exemplos particulares". Os trabalhos de Cayley contribuíram para o desenvolvimento da Teoria dos Números e para a axiomatização do conceito de grupo. Milies (2004, p. 40) argumenta que:

> Ao definir a noção de grupo abstrato, Cayley usou uma notação multiplicativa e, para frisar o fato de que num grupo está definida apenas uma única operação, ele observa que no seu conjunto, os símbolos $+$ e 0 não têm nenhum significado (MILIES, 2004, p. 40).

Boyer (1974, p. 434) afirma que o conceito de grupo foi essencial para o aparecimento das ideias abstratas na primeira metade do século dezenove. O autor evidencia que os trabalhos de Galois sobre resolução de equações algébricas foram considerados não apenas pelos seus resultados específicos, mas especialmente pela natureza de uma estrutura algébrica que Galois denominou pioneiramente de grupo.

Podemos considerar que durante o período de construção do conceito de grupo abstrato, os matemáticos envolvidos neste processo não contavam com recursos tecnológicos para a realização de seus trabalhos. Voltaremos nossa atenção especialmente para o uso do *software* CAS Maple, a fim de mostrar sua eficácia no ensino de Álgebra Abstrata, para tanto veremos a seguir alguns conceitos básicos da teoria dos grupos necessários para a compreensão das aplicações que exibiremos com o uso deste *software*.

4 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE GRUPOS

A seguir exibiremos conceitos necessários para a compreensão dos exemplos de aplicações obtidos com os recursos do *software* CAS Maple sobre os grupos simétricos S_n . Tais conceitos exercem papel fundante na seção referente às aplicações.

Definição 1: Seja G um conjunto munido de uma operação binária $* : G \times G \to G$, dizemos que G é um grupo e denotamos por $(G, *$, se satisfaz os seguintes axiomas:

- Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$.
- Elemento neutro: $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.

- Inverso: Para cada $a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

E além desses axiomas o grupo também satisfaz o seguinte axioma: $= b * a, \forall a, b \in G$. O grupo é denominado grupo abeliano ou comutativo.

Definição 2: Sejam G um grupo e H um subconjunto de G, H não vazio, dizemos que H é um subgrupo de G e denotamos por $H \leq G$ se H é também um grupo com a mesma operação de G.

Preposição 1: Seja Gum grupo e H um subconjunto de G. As seguintes condições são equivalentes:

a) H é um subgrupo de G.

b) i) $e \in H$; ii) $\forall a, b \in H$ tem-se $ab \in H$; iii) $\forall a \in H$ tem-se $a^(- 1) \in H$.

c) $H \neq \emptyset$ e $\forall a, b \in H$ tem-se $ab^{-1} \in H$.

Dem.: Ver Goncalves (2012, p. 126).

Definição 3: A cardinalidade de um grupo G é denominada de ordem do grupo G.

Notação: $|G|$;

Teorema de Lagrange. Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G então $|H|$ é um divisor de $|G|$, (isto é, a ordem de H é um divisor da ordem G).

Dem.: Ver Goncalves (2012, p. 134).

Definição 4: Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Dado $a \in G$, chamamos de classe lateral à esquerda de G com relação a G ao conjunto

$$aH = \{ah/h \in H\} \tag{1}$$

Analogamente, denominamos de classe lateral a direita de G com relação a H ao conjunto

$$Ha = ha/h \in H \tag{2}$$

Definição 5: Sejam G um grupo e H um subgrupo de G denotamos por

$$G/H == \{gH/g \in G\} \tag{3}$$

o conjunto das classes laterais a esquerda de G com relação a H.

Definição 6: Sejam G um grupo e H um subgrupo de G se H é um subgrupo normal de G, então são equivalentes as seguintes afirmativas:

i) $aHa^{-1} = H$

ii) $aH = Ha$

5 GRUPOS SIMÉTRICOS S_n

Definição 7: Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto não vazio, o conjunto

$$S(X) = \{f : X \to X/f \; seja\, bijetiva\} \tag{4}$$

com a operação composição de funções é um grupo, denominado grupo de permutações ou grupo simétrico de X. Em particular, se $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ é um conjunto finito denotaremos por S_n o grupo de permutações $S(X)$. O número de elementos de S_n é dado por $n!$.

Os elementos $f \in S_n$ costumam se representados na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & ... & f(n) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Definição 8:Uma permutação chama-se permutação cíclica ou ciclo de comprimento k ou ciclo de ordem k, se aplica a_1 em a_2, a_2 em a_3, ... , a_{k-1} em a_k, a_k em a_1, sendo a_1, a_2,...,a_n elementos de X distintos. Este ciclo denota-se por, $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Definição 9: Um ciclo de comprimento $k = 2$ recebe o nome de transposição.

Preposição 1: Dois ciclos disjuntos comutam.

Dem.: Ver Iezzi e Domingues (2003, p. 201).

Preposição 2: Toda permutação S_n, exceção feita a permutação idêntica, pode ser escrita univocamente (salvo quanto a ordem dos fatores) como produto de ciclos disjuntos.

Dem.: Ver Iezzi e Domingues (2003, p. 202).

Preposição 3: Se $n > 1$, então toda permutação de S_n pode ser expressa como um produto de transposições.

Dem.: Ver Iezzi e Domingues (2003, p. 203).

Teorema 1: As transposições $(1\ 2), (1\ 3), ..., (1\ n)$ geram S_n.

Dem.: Ver D'Azevedo (2001, p. 7).

Definição 10: Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada par ou ímpar conforme possa ser expressa por um produto de um número par ou ímpar de transposições.

6 APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE CAS MAPLE

O desenvolvimento do CAS Maple teve inicio em 1981 na Universidade de Waterloo no Canadá e a partir de 1988 passou a ser comercializado pela empresa canadense Maplesoft.

O software CAS Maple desenvolvido inicialmente para a resolução de problemas de caráter matemáticos também pode ser visto como uma ferramenta pedagógica para o ensino de Matemática. Sua utilização envolve temas variados na Matemática, alguns mais básicos, como simplificação de uma expressão algébrica, e outros mais avançados, como cálculo diferencial e integral, equações diferenciais, construção de gráficos planos e tridimensionais, estruturas algébricas, entre outros (ANDRADE, 2003).

O *software* Maple conta com vários pacotes, trataremos especialmente do pacote *group*, este é utilizado em situações que envolvem os chamados grupos simétricos S_n.

A seguir, apresentaremos os comandos do pacote group que nos possibilitam resolver problemas de estruturas algébricas. Antes disso, vejamos como utilizar esse pacote:

- Os grupos com os quais trabalharemos devem ser grupos de permutações;
- Os elementos do grupo de permutações devem ser fornecidos como produto de ciclos disjuntos. Um grupo de permutações pode ser definido da seguinte forma:

```
permgroup(grau,{geradores})
```

"O Maple interpreta uma lista $[a_1, a_2, ..., a_n]$ formada com os inteiros de 1 a n como sendo uma permutação f de S_n na qual $f(i) = a_i$"(ANDRADE, 2003).

Depois de iniciar o Maple, podemos listar os comandos do pacote group, basta digitar um *with(group)*; como é visto na figura 1.

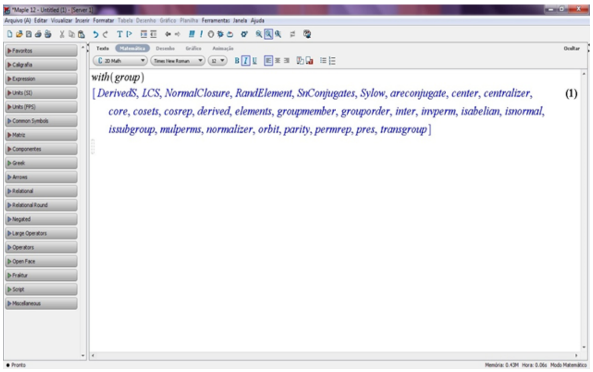

Figura 1: Comandos do pacote *group* do *software* Maple.

O pacote *group* do Maple conta com os seguintes comandos:

```
group[areconjugate], group [core] ,
group[DerivedS], group[inter],
group[issubgroup], group[normalizer],
group[pres], group[transgroup],
group[center], group[cosets],
group[elements], group[invperm],
group[LCS], group[orbit],
group[RandElement],
Transitive Groups Naming Scheme,
group[centralizer], group[cosrep],
group[groupmember], group[isabelian],
group[mulperms], group[parity],
group[SnConjugates], type/disjcyc,
converter / disjcyc,
converter / permlist,
group [derived], group [grouporder],
group[isnormal], group[NormalClosure],
group[permrep]  e  group[Sylow].
```

Neste artigo, é discutida a utilização do Maple no ensino de Álgebra Abstrata, com o intuito de mostrar a eficácia deste *software* no ensino desta disciplina.

7 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES UTILIZANDO O PACOTE GROUP DO CAS MAPLE: GRUPOS SIMÉTRICOS S_n

Selecionamos alguns comandos do pacote *group*, apresentado anteriormente, para mostrar exemplos de aplicações do CAS Maple envolvendo os grupos simétricos S_n. Os comandos que exibiremos foram escolhidos com base nos seguintes critérios: fácil compreensão e utilização, tornar determinadas tarefas mais rápidas e referirem-se a conceitos de um curso introdutório de Álgebra Abstrata.

Iniciaremos com o comando $convert\ /\ disjcyc$ que permite converter uma permutação como produto de ciclos disjuntos, vejamos um primeiro exemplo:

7.1 Exemplo 1

Seja $\alpha = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3657124 \end{pmatrix} \in S_7$, utilizando o comando $convert\ /\ disjcyc$, obtemos:

```
> convert([3,6,5,7,1,2,4],'disjcyc')
>[[1,3,5],[2,6],[4,7]]
```

É fácil obter esta representação sem o amparo de um recurso computacional, não obstante, quando consideramos um grupo simétrico S_n de grau $n >> 1$, o trabalho aumenta de modo considerável. Utilizando o comando $convert\ /\ disjcyc$ o tempo de obtenção do resultado pode ser otimizado. De fato, vejamos os exemplos a seguir:

7.2 Exemplo 2

Seja , obtemos com o Maple o seguinte resultado:

```
> convert([5,16,6,7,1,2,4,11,12,
9,10,8,19,18,13,20,15,17,14,3],
'disjcyc')
```

$$\beta = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 34567\ 8\ \ 9\ 1011121314151617181920 \\ 516671241112\ 9\ 10\ 8\ 19181320151714\ 3 \end{pmatrix} \in S_{20}$$

```
>[[1,5],[2,16,20,3,6],[4,7],
[8,11,10,9,12],[13,19,14,18,17,15]]
```

7.3 Exemplo 3

Seja, como denota o Maple, a permutação

$\alpha =$

```
[1,5,3,8,9,4,2,6,7,11,16,13,12,10,14,
17,15,20,18,24,19,26,21,23,30,29,22,
25,27,28,50,45,49,31,37,46,43,38,32,
47,40,35,33,39,36,34,41,42,44,48],
```

com $\alpha \in S_50$.

Utilizando o $convert\ /\ disjcyc$, obtemos o resultado apresentado na figura 2.

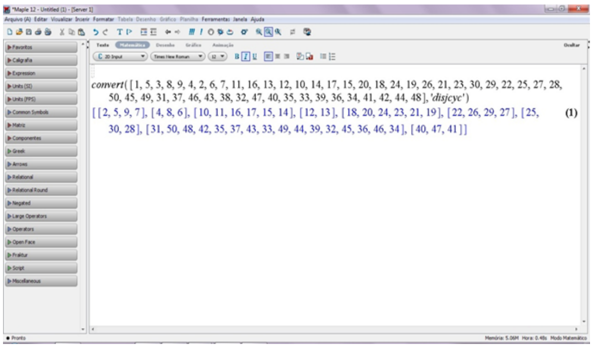

Figura 2: Exemplo de aplicação do comando *convert/disjcyc* do pacote *group* do *software* Maple.

Dado um grupo simétrico S_n, à medida que o grau n aumenta, torna-se mais exaustivo escrever, sem o auxílio de um instrumento computacional, uma permutação pertencente a este grupo como um produto de ciclos disjuntos, entretanto, vimos nos exemplos 2 e 3 que com o uso do comando convert *disjcyc* esta tarefa pode ser executada com o uso de um menor tempo.

É possível realizar o processo inverso, isto é, dado um produto de ciclos disjuntos, podemos escrevê-lo como uma lista que representa a permutação correspondente, para tanto devemos utilizar o comando $convert\ /\ permlist$. Vejamos os próximos exemplos:

7.4 Exemplo 4

Seja o produto de ciclos dado por $(23)(517)$, que representa uma permutação do grupo simétrico de grau sete. Fornecendo o grau do grupo de permutações e utilizando o comando $convertc\ /\ permlist$, obtemos:

```
> convert([[2,3],[5,1,7]],
'permlist',7)
> [7,3,2,4,1,6,5]
```

7.5 Exemplo 5

Seja $\gamma \in S_{70}$, onde γ é representada pelo produto

```
(32)(517)(6812)(303648)(574254)
(676570),
```

novamente com o comando $convert\ /\ permlist$, obtemos:

```
>convert([[3,2],[5,1,7],[6,8,12],
[30,36,48],[57,42,54],[67,65,70]],
'permlist ',70)
>[7,3,2,4,1,8,5,12,9,10,11,6,13,14
,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,
26,27,28,29,36,31,32,33,34,35,48,37,
38,39,40,41,54,43,44,45,46,47,30,
49,50,51,52,53,57,55,56,42,58,59,
60,61,62,63,64,70,66,65,68,69,67]
```

Assim como o comando $convert\ /\ disjcyc$ acelera o processo de escrever uma permutação como produto de ciclos disjuntos, o comando $convert\ /\ permlist$ também torna mais rápido o processo inverso. É possível, a partir do comando *mulperms*, efetuar uma composição de duas permutações dadas, que devem ser fornecidas como produto de ciclos disjuntos, como veremos a seguir:

7.6 Exemplo 6

Sejam $\beta = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 4127653 \end{pmatrix}$ e $\mu = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2354167 \end{pmatrix}$ permutações pertencentes ao grupo S_7, vamos primeiramente escrever cada uma como produto de ciclos disjuntos:

```
> convert([4,1,2,7,6,5,3],'disjcyc')
     [[1,4,7,3,2],[5,6]]
> convert([4,6,5,1,7,2,3],'disjcyc')
> [[1,4],[2,6],[3,5,7]]
```

Finalmente, utilizando o comando mulperms obtemos:

```
> with(group):
> mulperms([[1,4,7,3,2],[5,6]], [[1,4],
[2,6],[3,5,7]])
> [[2,4,3,6,7,5]]
```

7.7 Exemplo 7

Sejam $\alpha, \beta \in S_{30}$, tais que $\alpha =$

```
[1,8,9,4,30,6,13,2,3,10,14,12,7,
11,15,25,19,18,17,20,23,22,21,24,16,
26,29,28,27,5]
```

e $\beta =$

```
[14,27,6,15,11,9,13,2,3,10,1,12,7,
30,4,25,18,19,17,20,23,22,21,24,16,26,
5,28,8,29],
```

temos então com Maple o seguinte resultado:

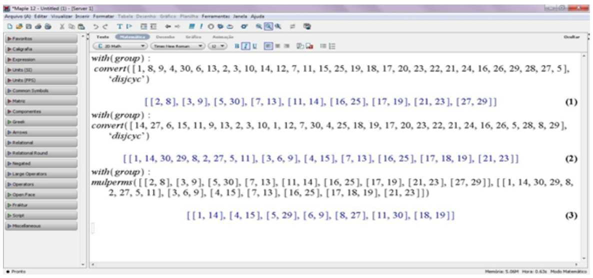

Figura 3: Exemplo de aplicação do comando mulperms do pacote *group* do *software* Maple.

```
> with(group):
>convert([1,8,9,4,30,6,13,2,3,10,
14,12,7,11,15,25,19,18,17,20,23,
22,21,24,16,26,29,28,27,5],
'disjcyc')
> [[2,8],[3,9],[5,30],[7,13],
[11,14],[16,25],[17,19],[21,23],
[27,29]]
> with(group):
>convert([14,27,6,15,11,9,13,2,3,
10,1,12,7,30,4,25,18,19,17,20,23,
22,21,24,16,26,5,28,8,29],
'disjcyc')
>  [[1,14,30,29,8,2,27,5,11],
[3,6,9],[4,15],[7,13],[16,25],
[17,18,19],[21,23]]

> with(group):
> mulperms([[2,8],[3,9],[5,30],
[7,13],[11,14],[16,25],[17,19],
[21,23],[27,29]],[[1,14,30,29,
8,2,27,5,11],[3,6,9],[4,15],
[7,13],[16,25],[17,18,19],[21,23]])
> [[1,14],[4,15],[5,29],[6,9],
[8,27],[11,30],[18,19]]
```

Utilizando o comando *mulperms* vimos que a tarefa de compor duas permutações é bastante simples. Vale ressaltar que, dependendo do grupo simétrico ao qual pertençam as permutações, esta tarefa poderá não ser tão fácil sem o auxilio de um recurso computacional como o *software* Maple.

Dada uma permutação é possível encontrar sua inversa, para tanto basta utilizar o comando *invperm*.

7.8 Exemplo 8

Consideremos a permutação Sejam $\beta = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27581436 \end{pmatrix} \in S_8$, que pode ser escrita como $(1\ 2\ 7\ 3\ 5)(4\ 8\ 6)$. Vamos, agora, através do comando *invperm*, calcular sua inversa β^{-1}:

```
> with(group):
> invperm([[1,2,7,3,5],[4,8,6]])
> [[1,5,3,7,2],[4,6,8]]
```

Novamente, à medida que consideramos um grupo simétrico S_n, com $n >> 1$, uma estratégia semelhante à anterior pode se tornar inexequível sem o amparo computacional. Vejamos, pois, o próximo exemplo:

7.9 Exemplo 9

Vamos calcular a inversa da permutação do exemplo 2:

```
> with(group):
> invperm([[1,5],[2,16,20,3,6],[4,7],
    [8,11,10,9,12],[13,19,14,18,17,15]])
>[[1,5],[2,6,3,20,16],[4,7],
[8,12,9,10,11],[13,15,17,18,14,19]]
```

7.10 Exemplo 10

(Higino, 2003, p. 207) Qual é a inversa da permutação $\sigma = (12)(35)(789)$ no grupo S_{10}?

```
> with(group):
> invperm([[1,2],[3,5],[7,8,9]])
> [[1,2],[3,5],[7,9,8]]
```

Se fossemos calcular a inversa destas permutações sem nenhum recurso computacional, empenharíamos maior esforço, enquanto que, com o comando invperm o resultado é obtido quase que de imediato.

Podemos também encontrar a paridade de uma permutação, isto é possível com a utilização do comando *parity*. Vale observar o uso da definição 12. Quando a permutação é par o comando *parity* retorna 1, e caso a permutação seja ímpar retorna -1.

7.11 Exemplo 11

Seja $G \leq S_4$, um grupo cujos geradores são $(2\ 3)$ e $(1\ 4)$. Vamos utilizar o comando *RandElement*, que nos permite obter um elemento de G aleatoriamente, e em seguida, através do comando *parity*, vamos determinar se a permutação obtida é par ou ímpar.

```
> with(group):
> pg:=permgroup(4,{[[2,3]],[[1,4]]}):
> a:=RandElement(pg)
> [[2,3,6,5,4]]
> parity(a)
> 1
```

7.12 Exemplo 12

Seja $H \leq S_8$, um grupo cujos geradores são $(1\ 3)$ e $(2\ 4\ 7\ 5)$ e novamente utilizando comando *RandElement* vamos obter uma permutação pertencente a H verificar determinar sua paridade:

```
> with(group):
> pg:=permgroup(8,{[[1,3],[2,4,7,5]}):
> γ:=RandElement(pg)
> [[2,4,7,5]]
> parity(?)
> -1
```

Para calcular a paridade de γ, sem o uso de qualquer recurso computacional, devemos primeiro escrevê-la com produto de transposições e em seguida contar quantas transposições foram obtidas. Com o comando *parity* isto não é necessário. Podemos verificar através do comando *groupmember* se uma dada permutação α pertence a um grupo simétrico S_n. Veremos um exemplo disto a seguir:

7.13 Exemplo 13

```
> with(group):
> pg := permgroup(4,{[[1,4,3,2]]}):
> groupmember([[1,3,2]],pg)
> false
```

7.14 Exemplo 14

Seja $G \leq S_9$ um grupo com $(1\ 4)$ e $(5\ 3\ 7\ 2\ 8)$ seu geradores, vamos determinar se a permutação $(2\ 5\ 7\ 8\ 3)$ pertence a G:

```
> with(group):
> pg := permgroup(8,{[[1,4],
[5,3,7,8]]}):
> groupmember([[2,5,7,8,3]],pg)
> false
```

Dado um grupo simétrico S_n, vimos que é fácil determinar se uma permutação pertence a este grupo, para tanto devemos fazer uso do comando *groupmember*.

Através do comando, *grouporder* é possível calcular a ordem de um grupo de permutações.

7.15 Exemplo 15

Seja G um subgrupo de S_7, cujos geradores são $(1,2,3)$ e $(3,4,5,6,7)$. Utilizando o comando *grouporder* podemos calcular a ordem de G:

```
> with(group):
> grouporder(permgroup(7,{[[1,2,3]],
[[3,4,5,6,7]]}))
> 2520
```

Vale ressaltar que estamos considerando neste exemplo um subgrupo de S_7 e não o próprio S_7, a ordem de S_7 é dada por $7!$. Calcular a ordem de S_7 sem nenhum recurso computacional é uma tarefa razoável. No entanto, no caso de um subgrupo de S_7 para o qual conhecemos seus geradores o ideal é ter o auxílio de alguma ferramenta computacional, como o comando *grouporder* do *software* Maple.

Calculada a ordem, em seguida podemos também gerar os elementos de um grupo de permutação utilizando o comando *elements*.

7.16 Exemplo 16

Seja G um subgrupo de S_5 cujos geradores são $(1,4)(2,3)$ e $(1,2)(35)$, o comando *group [elements]* permite listar todos os elementos de G:

```
> with(group):
> pg := permgroup(5,{[[1,4],[2,3]],
[[1,2],[3,5]]}):
> elements(pg)
> {[ ], [[1, 3], [4, 5]], [[2, 5],
[3, 4]],[[1, 2, 3, 4, 5]], [[1, 2],
[3, 5]], [[1, 5],[2, 4]], [[1, 4],
[2, 3]], [[1, 4, 2, 5, 3]];
[[1, 5, 4, 3, 2]], [[1, 3, 5, 2, 4]]}
```

7.17 Exemplo 17

Seja G um subgrupo de S_7 cujos geradores são $(2\ 3)$, $(5\ 7)$ e $(4\ 6)$, vamos então através do comando *elements* determinar todos os seus elementos.

```
> with(group):
> pg := permgroup(7,{[[2,3]],[[5,7]],
[[3,5]]}):
> elements(pg)
```

```
> {[ ],[[2,3]],[[4,6]],[[5,7]],
[[2,3],[4,6]],[[2,3,[5,7]],[[4,6],
[5,7]],[[2,3],[4,6],[5,7]]
```

7.18 Exemplo 18

Seja o grupo simétrico S_4, vamos a partir dos comandos grouporder e elements, respectivamente, determinar a ordem e listar todos os elementos deste grupo.

```
> with(group):
> pg := permgroup(4, {[[1,2]],
[[1,3]],
[[1,4]]}):
> grouporder(pg)
>                    24
> elements(pg)
>{[],[[1,2]],[[1,3]],[[1,4]],
[[2,3]],[[2,4]],[[3,4]],[[1,2,3]],
[[1,2,4]],[[1,3,2]],[[1,3,4]],
[[1,4,2]],[[1,4,3]],[[2,3,4]],
[[2,4,3]],[[1,2,3,4]],[[1,2,4,3]],
[[1,3,2,4]],[[1,3,4,2]],
[[1,4,2,3]],[[1,4,3,2]],
[[1,2],[3,4]],
[[1,3],[2,4]],[[1,4],[2,3]]}
```

Quando consideramos grupos simétricos S_n de grau n com $n >> 1$, a tarefa de listar todos os seus elementos se torna impraticável. É o caso, então, de recorrer ao uso do comando *elements* que facilita significantemente este processo. O comando *issubgroup* possibilita verificar se um determinado conjunto H não vazio é subgrupo de um grupo G, se H for subgrupo de G é retornado *true*, caso contrário é retornado *false*, como exemplificado a seguir:

7.19 Exemplo 19

Sejam $G < S_4$ cujo gerador é $(1\ 4\ 3\ 2)$, e $H \subset G$ cujo gerador é $(1\ 2\ 3)$. Vamos determinar a partir do Maple se $H < G$:

```
> with(group):
> pg:=permgroup(4,{[[1,4,3,2]]}):
> sg:=permgroup(4,{[[1,3,2]]}):
> issubgroup(sg,pg)
> false
```

Em algumas situações a tarefa de determinar que um grupo é subgrupo de um outro grupo não é tão simples, uma vez que é necessário usar técnicas de demonstrações, como as utilizadas por Goncalves (2012, p. 126), que dependendo dos grupos em questão pode-se ter mais dificuldades, com o Maple basta saber quem são os geradores dos grupos em questão e utilizar o comando issubgroup.

A partir do comando isnormal é possível determinar se um dado grupo H é subgrupo normal de um grupo G (ver definição 6, p. 9), levando em consideração que H deverá ser subgrupo de G. O exemplo seguinte mostra como isso é possível:

7.20 Exemplo 20

(ANDRADE, 2003, p. 4)

```
> with(group):
> G := permgroup(6,{[[1, 2], [3, 4]],
[[1, 4]], [[5, 6, 1]]}):
> H := permgroup(6, {[[2, 3], [5, 6]],
[[3, 6]], [[1, 4], [2, 6, 5, 3]]}):
> isnormal(G, H)
> false
```

Com o comando *isabelian* podemos saber se um determinado grupo G é ou não abeliano, como é visto nos exemplos adiante:

7.21 Exemplo 21

Sejam G o grupo cujo gerador é $(1\,4\,3\,2)$ e H cujo gerador é $(1\ 3\ 2)$, com $G < S_4$ $H < S_4$. Vamos determinar através do Maple se G e H são abelianos:

```
> with(group):
> pg:=permgroup(4,{[[1,4,3,2]]}):
> sg:=permgroup(4,{[[1,3,2]]}):
> isabelian(pg)
> true
> isabelian(sg)
> true
```

7.22 Exemplo 22

Seja $G < S_8$ cujos geradores são $(1\,3), (2\,7)$ e $(3\,8)$:

```
> with(group):
> pg:=permgroup(8,{[[1,3]],[[2,7]],
[[3,8]]}):
> isabelian(pg)
> false
```

8 CONCLUSÃO

Neste estudo, exibimos exemplos de aplicações do *software* Maple a respeito dos grupos simétricos S_n, que podem ser explorados em sala de aula.

A respeito dos exemplos discutidos, vimos que, dado um grupo simétrico S_n, é possível com facilidade e, com o uso do pacote group do software Maple, descrever todos os seus elementos, calcular sua ordem; decidir se um elemento lhe é pertencente; determinar se é abeliano; verificar sua normalidade, dentre outras questões. Desta forma, durante a etapa da pré-análise, proposta por Bardin (1977), pudemos verificar que, através do uso do pacote group, no que diz respeito aos grupos simétricos S_n, foi possível abordar conceitos e resultados importantes referentes aos grupos abstratos em geral.

Sem o auxílio de um recurso computacional como o *software* Maple, pudemos constatar, durante a fase de referenciação de índices e elaboração de indicadores proposta por Bardin (1977), que os exemplos discutidos seriam realizados com maior dificuldade e empenho de um maior tempo conforme tivéssemos um grupo simétrico S_n com $n >> 1$.

Pudemos verificar com facilidade que os comandos do pacote *group* do *software* Maple são executados de forma simples, tornando fácil a compreensão até mesmo daqueles que não têm familiaridade com este recurso computacional. Neste escrito, tratamos o Maple como uma proposta de ferramenta auxiliar no ensino de um curso introdutório de álgebra abstrata, isto é, como uma proposta ao professor de nível superior que queira acrescentar às suas aulas um lado computacional a fim de buscar inová-las.

Considerando o que Bardin (1977) sugere na etapa de tratamento dos resultados, podemos pensar em uma próxima pesquisa onde seria realizado um estudo sobre o uso do pacote *group* do *software* Maple em sala de aula.

AGRADECIMENTOS

O presente artigo constituiu parte das investigações de iniciação científica no curso de licenciatura em Matemática do IFCE. Outrossim, o mesmo representa um recorte do objeto estudado no período de vigência da bolsa de iniciação, sob orientação do Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves. A exequibilidade do projeto tornou-se realidade consoante o apoio fundamental da Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação - PRPI do Institutop Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará.

Referências

ALBUQUERQUE, I. B. *O conceito de grupo: sua formação por alunos de Matematica , 2005. 333 f. (tese). Fortaleza:, 2005.* Tese (tese de doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005. 333 f.

ALVES, F. R. V. Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do cálculo. *Vidya (Santa Maria. Online)*, v. 32, p. 149 – 161, 2012. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/10.pdf>.

ALVES, F. R. V. Discussão do ensino de integrais impróprias com o amparo da tecnologia. In: *Anais do XI ENEM*. [s.n.], 2013. p. 1 – 10. Disponível em: <http://enem2013.pucpr.br>.

ANDRADE, L. N. *Grupos de Permutações com o Maple*. João Pessoa, 2003. Disponível em: <http://mat.ufpb.br/~lenimar/grupos.pdf>.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

BOYER, C. B. *Historia da Matematica*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BUSSMANN, C. J. C. *Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de matematica sobre o conceito de grupo*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

D'AZEVEDO, A. J. *Álgebra I*. [S.l.: s.n.], 2001.

DUBINSKY, E. et al. On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, v. 27, n. 3, p. 267–305, 1994. ISSN 0013-1954. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273732>.

EVES, H. *Introdução à histíria da Matematica*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GONCALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IEZZI, G.; DOMINGUES, H. *Algebra Moderna*. São Paulo: Moderna, 2003.

KATZ, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. 2. ed. London: Addison Wesley, 1998.

MILIES, C. P. Uma breve introdução a historia da teoria de grupo. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMATICA. *Atas da XII Escola de Álgebra*. Minas Gerais, 1992.

MILIES, C. P. Breve historia da algebra abstrata. In: UFBA. *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matematica*. Salvador, 2004. Acesso em: 10 de fevereiro 2013. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>.

VALENTE, J. A. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. Campinas: UNICAMP, 1993.