HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: OS NÚMEROS FIGURAIS EM 2D e 3D

Francisco Regis Vieira Alves* Hermínio Borges Neto José Alberto Duarte Maia*****

RESUMO

Neste artigo discutem-se aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos, relacionados aos *números figurais*, de origem grega, com configurações no plano (2D) e no espaço (3D). Assim, a partir da apresentação introdutória de um cenário particular da civilização helênica, registra-se a partir do relato de autores (BURTON, 2006; CARAÇA, 1951; POPPER, 1972) que o interesse dos gregos por tais entidades conceituais foi bem mais abrangente e sistemático do que preocupações padrões e estanques com a Aritmética e a Geometria. Destacam-se também os modelos matemáticos formais que permitem a inspeção e a formalização (por uso de *Indução Matemática*) de propriedades e padrões identificados a partir das relações conceituais entre Aritmética e Álgebra. Por fim, destacam-se algumas considerações acerca do ensino/aprendizagem e o modo como os conteúdos discutidos no âmbito histórico podem favorecer de modo auspicioso à formação do professor de Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Números Figurais. História da Matemática. Ensino. Epistemologia.

THE HISTORY OF MATHEMATICS: FIGURAL NUMBERS IN 2D AND 3D

ABSTRACT

In this article, we discuss epistemological, philosophical and historical aspects related to figural numbers of Greek origin, with settings in 2D plan and 3D space. Thus, from the introductory presentation of a particular scenario of the Hellenic civilization, the account of some authors is registered (BURTON, 2006; CARAÇA, 1951; POPPER, 1972) that the Greek's interest in such conceptual entities was much more comprehensive and systematic than the usual and standardized concerns about Arithmetic and Geometry. We also highlight the formal mathematical models which allow the inspection and formalization (by using Mathematical Induction) of properties and patterns identified from the conceptual relations between Arithmetic and Algebra. Finally, we emphasize some considerations about the teaching/learning process and how the content discussed in a historical context can auspiciously favor the training of Mathematics teachers.

KEYWORDS: F*igural numbers, History of Mathematics, Teaching, Epistemology.*

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, discutimos o tópico conhecido como *números figurais*, de origem grega, recorrentemente abordado em livros de Historia da Matemática – (HM). A partir de extensa consulta de autores (BURTON, 2006; CARAÇA, 1951) reconhecidos, estendemos a discussão envolvendo configurações em 2D e 3D das referidas noções matemáticas que, para alguns pensadores (POPPER, 1972) além do caráter de relevância histórica, caracterizam e indicam o olhar epistemológico grego com respeito à própria Matemática.

A relevância do viés filosófico e epistemológico, de acordo com o que apresentamos e propomos neste escrito, é fator de aperfeiçoamento na constituição profissional do futuro professor de Matemática, bem como o enriquecimento da visão particular deste profissional necessária a ser transmitida aos seus alunos. Neste sentido, Gaspar (2003, p. 20) esclarece que:

(*) Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, *campus* de Fortaleza. E-mail: fregis@ifce.edu.br

(**) Doutor em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Professor da Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Laboratório Multimeios. E-mail: hermínio@ufc.br

(***) Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais. Professor da Universidade Federal do Ceará. E-mail: alberto.duarte@ufc.br

> na prática de ensinar matemática, geralmente o professor adota um “modelo de ensino” que contém elementos de sua própria experiência como estudante. Com esse modelo, acompanham idéias a respeito: do papel do professor (geralmente um expositor) e do aluno em sala de aula; do modo como o livro texto pode ser utilizado; dos tipos de problemas existentes em uma sala de aula, de atividades a ser desenvolvidas com os alunos e de avaliações a ser aplicadas. Na realidade, cada professor possui um modelo ou uma caracterização do que é a Matemática e como esta pode ser aprendida pelos alunos.

Observamos, ainda, que o “modelo de ensino” referenciado pelo autor é condicionado pela própria natureza do conteúdo específico do ensino, assim, não podemos descuidar do seu caráter epistemológico. Mais adiante, Gaspar (2003) aponta as vantagens do tipo de abordagem que evidencia a dimensão histórica e epistemológica do saber matemático. Ademais, acentua a perspectiva do estudante, ao colocar em ênfase que:

> além disso, o estudo histórico de um determinado conceito matemático propicia ao estudante um contexto em que colocar esse conceito ajudando-o a apreciar sua importância para aqueles grupos sociais nos quais o conceito emergiu, sua importância interna à própria matemática e a entender mais claramente quando esse conceito é necessário ou não no discurso matemático (p. 21).

Destaca-se também neste trabalho a apresentação de *modelos matemáticos*, formais, desconhecidos, naquela época, dos gregos e, que, em nossos dias, proporcionam a confiabilidade e veracidade de propriedades muitas vezes empregadas por uma via intuitiva pela civilização que mais contribuiu para a sistematização deste saber científico.

Por fim, nosso maior propósito é fornecer uma abordagem envolvendo conteúdos de História da Matemática - HM “aplicáveis” no contexto escolar, mas com o cuidado de se evitar o caráter meramente episódico, figurativo, novelesco ou anedótico dos conteúdos de HM. Assim, o futuro professor poderá conhecer os modelos matemáticos explorados no passado e podem ser abordados com amparo histórico e epistemológico.

OS NÚMEROS FIGURAIS E A FILOSOFIA GREGA

O vigor, a criatividade e a genialidade de figuras emblemáticas gregas é objeto de reflexão para vários autores (POPPER, 1972). Neste sentido, destacamos o exemplo analisado e discutido por Popper (1972, p. 103) relacionado com a *crise do atomismo original grego*. Popper defende que “a doutrina filosófica de Platão, a chamada teoria das formas ou ideias, não pode ser entendida senão dentro de um contexto extrafilosófico – mais especificamente, o contexto da situação-problema da ciência grega.”.

Popper sublinha o contexto da discussão referente ao problema da descoberta da noção de matéria resultante do caráter irracional da raiz quadrada de dois. Popper (1972, p. 104) explica que “parece provável que a teoria das formas de Platão esteja intimamente associada, na sua origem, e no seu conteúdo, à teoria pitagórica de que todas as coisas são, essencialmente, números. Por outro lado, tal afirmação é difícil de se verificar.”(CARAÇA, 1951, p. 72).

Note-se que Popper (1972) fornece sua perspectiva pessoal, referente à “problemática grega”, apontada no parágrafo anterior. Com efeito, Popper menciona que

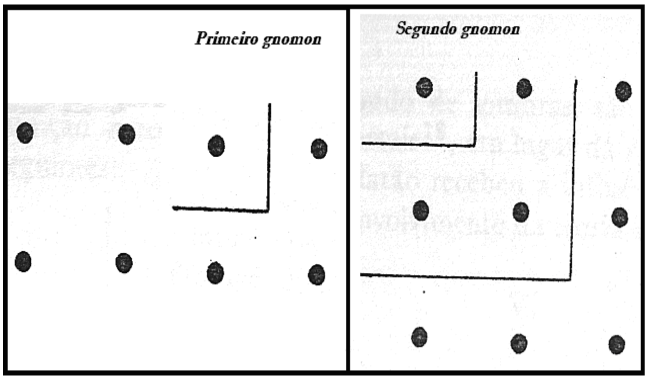
> [...] ao que parece, o fundador da ordem ou seita pitagórica estava profundamente impressionado com duas descobertas: a de que um fenômeno aparentemente qualitativo, como a harmonia musical, dependia de razões numéricas - $1:2$; $2:3$; $3:4$; e a de que o ângulo “reto” refletia as razões numéricas $3:4:5$ ou $5:12:13$ (os lados de um triângulo retângulo). Estas duas descobertas teriam levado Pitágoras à generalização algo fantástica de que todas as coisas são, em essência, números ou proporções, de que o número é a razão, a essência racional das coisas, da sua natureza real (p. 104).

Apoiado nestas descobertas e nas ideias que evoluíram a partir deste marco divisamos, no pensamento grego, sobretudo no pensamento mais influenciado pelos *pitagóricos*[1], o tratamento e várias aplicações no contexto

[1] Caraça (1951, p. 68) diz que “é seguro que, a partir do século VI a. C., existiu e exerceu larga influência da Grécia uma seita, de objetivos místicos e científicos, denominada escola pitagórica, dela parece ter sido Pitágoras o fundador.”.

de situações-problema no contexto da Geometria. Popper (1972, p. 104) destaca que "o tratamento destes problemas geométricos se baseavam no chamado *gnômon*"[2], que, de acordo com Kline (1972, p. 31), tem sua origem na Babilônia.

Figura1: Popper (1972, p. 104-105) descreve a noção de *gnômon*.



Popper (1972, p. 104-105) explica que "se indicarmos um quadrado (figura 1, lado esquerdo) por meio de quatro pontos, isso pode ser interpretado como o acréscimo de três pontos a um ponto original, situado no lado esquerdo superior.". Esses três pontos constituem o primeiro gnomon. Em seguida diz, que acrescentando o segundo gnomon, com outros cinco pontos, chegaríamos a figura 1, indicada acima (lado direito). Mais adiante, conclui que "cada número de sequência de números ímpares $1,3,5,7,......$ forma um gnomon de um quadrado." (p. 105).

Popper (1972, p. 107) extrai reflexões profícuas ao afirmar que "a teoria de Pitágoras, com seus diagramas feitos de pontos, contém sem dúvida a sugestão de um atomismo muito primitivo.". De fato, nestes como em outros exemplos de diagramas constituídos de pontos, que os helênicos relacionavam com formas geométricas são um indicativo disto. Ademais, as "formas" eram consideradas números, ou "razões' entre números. Por outro lado, qualidades abstratas, como harmonia e a retidão, eram vistas também com números. "Desse modo, se chegou à teoria geral de que os números são as essências racionais de todas as coisas." (POPPER, 1972, p. 106).

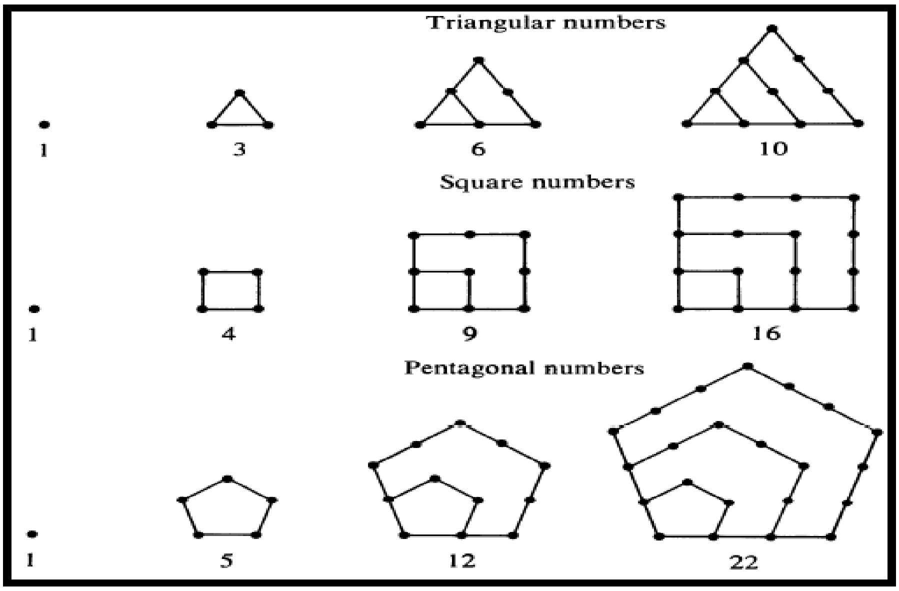
Ao decorrer do texto, Popper (1972), além de discutir alguns mais alguns casos e diagramas constituídos de pontos relacionados com as formas de Geometria Plana, emprega nomenclaturas particulares, sem explicitar, com exatidão, a origem e significado das mesmas. Assim, ele comenta outros diagramas semelhantes ao que exibimos inicialmente e fala de números quadrados, números triangulares e números oblongos. Concluímos, após esse pequeno interregno filosófico, que, na próxima seção, nos deteremos ao estabelecimento de bases formais para estes entes conceituais apontados por Karl Popper.

OS NUMEROS FIGURAIS GREGOS EM 2D

O historiador matemático Eves (1969, p. 53) explica que "os antigos gregos faziam a distinção entre o estudo das relações conceituais entre os números e a arte prática de contagem.". O autor recorda que os pitagóricos falavam de números que pretensamente possuíam propriedades místicas, como os números perfeitos, números deficientes e números abundantes; entretanto, nesta seção, nos deteremos ao estudo dos números figurais que, de acordo com Eves (1969, p. 54) se originaram com os primeiros membros da sociedade pitagórica. Em essência, os números figurais apresentavam as ligações entre a Aritmética e a Geometria, como vemos na figura 2, algumas disposições comentadas por Eves (1969).

[2] Estrada *et al* (2000, p. 234) acentua que "o conceito de *gnomon* foi importante na matemática grega. O termo assumiu vários significados ao longo dos tempos e com diferentes autores [...].".

Figura 2: Nomenclatura para os números figurais gregos descritos por Eves (1969, p. 55).



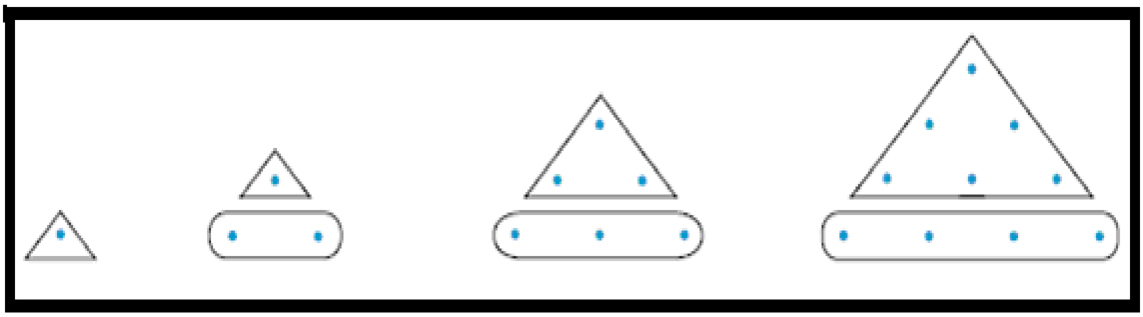
Vale recordar que, nos comentários devidos a Popper (1972) identificamos que o autor não apresenta, como objetivo principal, demonstrar as propriedades que surgem a partir das disposições geométricas que observamos acima. De fato, o autor emprega o raciocínio indutivo em alguns argumentos, todavia, não aplica o princípio da Indução Matemática que constitui um dos Axiomas de Peano (LIMA, 2010, p. 34). Além disso, do ponto de vista histórico, os gregos desconheciam o modelo de verificação e demonstração matemática baseado na Indução Matemática, sistematizado pelo matemático Giuseppe Peano (1858-1932).

Feita esta pequena digressão histórica, salientamos que nos resultados seguintes, apesar de intrinsecamente vinculados à noção de números figurais, as demonstrações que discutiremos se apoiam num forte princípio que exige que "saibamos definir objetos indutivamente." (LIMA, 2010, p. 35). Para iniciar, observando as disposições na figura 2, descrevemos o conjunto $\{1, 3, 6, 10, ..., ..., ?, ...\}$. Note-se que, com o objetivo de adicionar um maior índice de rigor relativo aos objetos conceituais, que discutiremos, e proceder à "higienização"[3] das propriedades matemáticas que apresentaremos doravante, atribuímos as seguintes notações para a lista anterior: $T_1 = 1$; $T_2 = 3$; $T_3 = 6$; $T_4 = 10$; ....(*).

Os números figurais acima são conhecidos como números triangulares e, de imediato, o primeiro problema que se coloca é a descrição de um número triangular de ordem elevada. Outra questão interessante é o modo ou o padrão que observamos para a obtenção de um número triangular a partir do seu antecessor. Neste caso, notamos que: $T_1 = 1$; $T_2 = T_1 + 2$; $T_3 = T_2 + 3$; $T_4 = T_3 + 4$. Assim, dado $n \in IN$, usando o raciocínio indutivo, escrevemos $T_{n+1} = T_n + (n+1)$, para $n \geq 1$(**). Reparamos que Khoshy (2007, p. 40) sugere o seguinte diagrama recursivo.

[3] Choquet (1963, p. 9) recorda que o matemático André Weyl dizia que a aplicação da lógica proporcionava a 'higienização' do matemático e assegurava o rigor.

Figura 3: Diagrama da recursividade descrito por Koshy (2007, p. 40).



Todavia, esta fórmula ainda apresenta sérios inconvenientes, uma vez que, para calcular o número triangular T_{100}, necessitamos saber o valor de T_{99}. Uma maneira eficiente de superar este problema consiste em observar as somas em (*); e notar que: $T_1 = 1 = \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, $\mathrm{T}_2 = 1+2 = 3 = \frac{3\cdot 2}{2} = \frac{2\cdot 3}{2} = \frac{2\cdot(2+1)}{2}$, $\mathrm{T}_3 = 1+2+3 = 6 = \frac{6\cdot 2}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$, etc.. Notamos que empregamos apenas as regras axiomáticas permissíveis nos conjuntos numéricos. Deste modo, suspeitamos a pertinência da seguinte propriedade, para um $n \in IN$ qualquer: $T_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, para verificar a mesma propriedade para todos os naturais, definimos o conjunto indutivo $\Re := \{n \in IN \mid T_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\}$ e reparemos que $1,2,3 \in \Re \neq \varnothing$. O passo indutivo requer à verificação de que se $n \in \Re \to n+1 \in \Re$. contudo, escrevemos $T_{n+1} = 1+2+3+\cdots+n+(n+1) \underset{\substack{Hipótese\\indutiva}}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Pelo *principio de indução matemática*, concluímos que $n+1 \in \Re := \{n \in IN \mid T_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\} \therefore \Re = IN$.

Isto quer dizer, do ponto de vista lógico, que a referida propriedade vale $\forall n \in IN$. No que segue, simplificaremos alguns destes argumentos que admitimos como de conhecimento do leitor. Deste modo, enunciamos nosso primeiro teorema.

Teorema 1 O único número triangular primo T_n é o 3, onde $n \geq 1$.

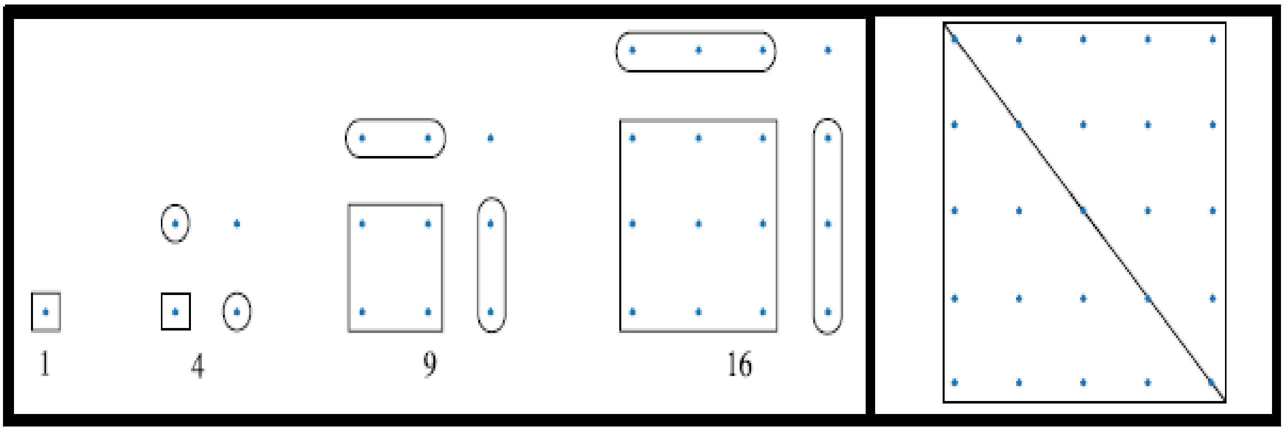
Demonstração: De fato, vimos por *indução* que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ onde $n \in IN \leftrightarrow \begin{cases} n \text{ é par} \\ \text{n é ímpar} \end{cases}$. Se n for par, digamos que $n = 2k$ onde $\mathrm{k} \in IN$, segue-se que: $T_{2k} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$. Assim, o único caso em que temos um número primo ocorre na condição em que $k = 1$ ou $(2k+1) = 1 \leftrightarrow k = 0$ o que não ocorrer segundo nossa definição inicial.

Assim, só temos a possibilidade para $k = 1 \to n = 2\cdot 1 \therefore T_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$. Na outra situação, pode ocorrer que $n = 2k+1$ é ímpar. Daí, escrevemos: $T_{2k+1} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$ e, neste caso, nenhuma das expressões pode ser a unidade, ou seja: $(2k+1) = 1$ ou $(k+1) = 1 \leftrightarrow k = 0$.

Consultando, mais uma vez, a figura 2, assumimos as seguintes notações para a coleção $\{\square_1, \square_2, \square_3, \square_4, ..., ?, ...\} = \{1, 4, 9, 16, ...\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...\}$. A partir da inspeção destes casos iniciais, observamos a propriedade de potências com expoente '2'.

Por hipótese de indução, escrevemos $\square_n = n^2 \therefore \square_{n+1} = ?$; todavia, notamos que cada *número quadrado* (POPPER, 1972, p. 105) pode ser obtido a partir do seu antecessor, da seguinte forma: $\square_2 = 1+3$, $\square_3 = 3+6$; $\square_4 = 6+10$, e observamos as relações entre os *números triangulares* com os *números quadrados* da seguinte forma: $\square_5 = 25 = 10+15 = T_4 + T_5$. Notamos que para $n \geq 1$, podemos escrever: $n^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = T_n + T_{n-1}$. Por *indução matemática*, estabelecemos: $\square_{n+1} = \square_n + (n+1) + (n+1) - 1 = \square_n + 2n + 1 \underset{\substack{Hipotese \\ Indutiva}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Figura 4: Koshy (2007, p. 44) descreve a forma recursiva nos números quadrados.



Reparemos na ultima linha, que usamos o fato de que acrescentamos uma linha e uma coluna com a ordem acrescida de uma unidade para obter o próximo número quadrado. E como não podemos repetir o elemento, retiramos uma unidade no final (figura 4). Com isto, demonstramos basicamente o próximo teorema.

Teorema 2: (*Theon* de Smyrna, 100 a. C.) Todo número quadrado é combinação de dois números triangulares.

Demonstração: Dado $n > 1$, escrevemos $\square_n = n^2 = T_n + T_{n-1}$. Podemos conjecturar esta propriedade a partir da figura 4, lado direito.

Teorema 3: (*R. B. Nelsen*, 1997) Dado $n \geq 1$, temos a relação $T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}$.

Demonstração: Observamos as relações $T_1^2 + T_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10 = 2 \cdot 5 = \frac{2^2 \cdot (2^2+1)}{2} = T_{2^2}$ e $T_2^2 + T_3^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 = \frac{90}{2} = \frac{3^2 \cdot 10}{2} = \frac{3^2 \cdot (3^2+1)}{2} = T_3^2$. Usando a hipótese de indução, escrevemos: $T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}$. Em seguida, analisamos a seguinte expressão:

$$T_n^2 + T_{n+1}^2 = \left(T_{n-1} + n\right)^2 + \left(T_n + n + 1\right)^2 = [T_{n-1}^2 + T_n^2] + 2n\cdot T_{n-1} + n^2 + 2(n+1)T_n + (n+1)^2 =$$

$$= [T_{n^2}] + \frac{2n(n-1)n}{2} + n^2 + \frac{2(n+1)n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = [T_{n^2}] + n(n-1)n + n^2 + (n+1)n(n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= [T_{n^2}] + (n-1)n^2 + n^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = [T_{n^2}] + (n-1)n^2 + n^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n^2(n^2+1)}{2} + (n-1)n^2 + n^2 + (n+1)(n+1)^2 = n^2\cdot[\frac{(n^2+1)}{2} + (n-1) + 1] + (n+1)(n+1)^2 =$$

$$= n^2\cdot[\frac{(n^2+1+2n}{2}] + (n+1)(n+1)^2 = n^2\cdot[\frac{(n+1)^2}{2}] + (n+1)(n+1)^2 = (n+1)^2\left[n^2\cdot[\frac{1}{2}] + (n+1)\right] =$$

$$= (n+1)^2\left[[\frac{n^2+2n+2}{2}]\right] = (n+1)^2\left[[\frac{n^2+2n+1+1}{2}]\right] = (n+1)^2\left[[\frac{(n+1)^2+1}{2}]\right] = [T_{(n+1)^2}]$$

Corolário 1: Dado $n \geq 1$, temos as seguintes relações:

(a) $8\cdot T_n + 1 = \square_{2n+1}$ (*Diophantus* de Alexandria, 200 a. C.);

(b) $8\cdot T_{n-1} + 4n = \square_{2n}$.

Demonstração: No item (a) temos de imediato que $8\cdot T_n + 1 = 8\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 = \square_{2n+1}$. E no item (b) escrevemos $8\cdot T_{n-1} + 4n = 8\cdot\frac{(n-1)n}{2} + 4n = 4n(n-1) + 4n = -4n + 4n^2 + 4n = \square_{2n}$.

Burton (2006, p. 100) discute os seguintes padrões aritméticos: $1^3 = T_1^2$; $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = T_2^2$; $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = T_3^2$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = T_4^2$

E observa que, do lado direito das identidades, temos o quadrado de *números triangulares*. Tal padrão possibilita conjeturar que a soma dos 'n' cubos de números é igual ao quadrado do *n-ésimo número triangular* o que nos proporciona enunciar o próximo teorema.

Teorema 4: (*Nicomachus*, 60 a. C.)Dado $n \geq 1$, temos que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = T_n^2$.

Demonstração: Para tal, Burton aconselha olhar as seguintes igualdades e somando-as, obtém relações interessantes como indicamos abaixo à direita.

$$\begin{cases} 1 = 1^3 \\ 3 + 5 = 2^3 \\ 7 + 9 + 11 = 3^3 \\ 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 = 5^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[n(n-1)+1\right] + \left[n(n-1)+3\right] + \ldots + \left[n(n-1)+(2n-1)\right] = n^3 \end{cases} \qquad \Rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + \left[n(n-1)+(2n-1)\right] = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Por outro lado, Burton (2006, p. 100) aconselha observar

$$\left[n(n-1)+1\right]+\left[n(n-1)+3\right]+....+\left[n(n-1)+(2n-1)\right]=\left[n^2-n+1\right]+\left[n^2-n+3\right]+\cdots+\left[n^2-n+(2n-1)\right]=$$
$$=\left[n^2-n+1\right]+\left[n^2-n+3\right]+\cdots+\left[n^2+n-1\right]=\left[n^2-n+1\right]+\left[n^2-n+3\right]+\cdots+\left[n(n+1)-1\right]=$$
$$=2\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]+\left[n^2-n+3\right]+\cdots+\left[n(n+1)-1\right]$$

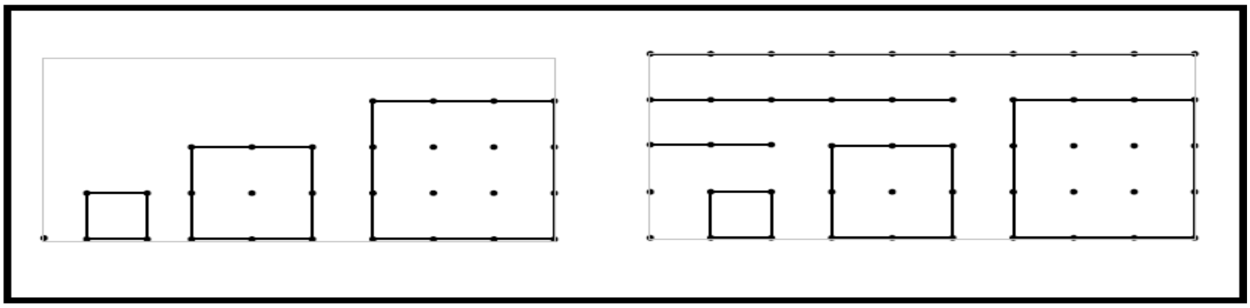
Burton (2006, p. 100) conclui escrevendo $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=T_n^2$.

$Teorema\ 5$: Para $n\in IN$, temos $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Demonstração: Desenvolveremos a ideia de Burton (2006, p. 108) quando explica que "o mesmo resultado foi obtido também por Arquimedes (287-212. b. C.)". Para o seguinte diagrama que envolve a ideia de somas os *números quadrados* que passamos a descrever.

Com esse objetivo, por meio de uma contagem e completando a figura do lado esquerdo, imaginamos do lado direito, a seguintes equivalências numéricas: $\underbrace{\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)}_{\text{números quadrados}}+\underbrace{\left(1+3+6+10\right)}_{\text{linhas horizontais}}=\underbrace{\left(1+2+3+4\right)}_{\text{base do retangulo}}\underbrace{\left(4+1\right)}_{\text{altura}}$

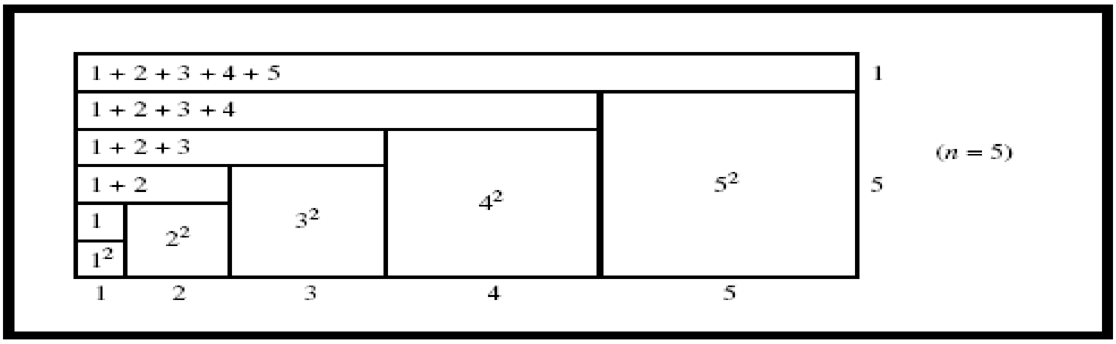
Figura 5: Diagrama explicativo de Burton (2006, p. 100)



Em seguida, observa que $\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)+\left(1+3+6+10\right)=\left(10\right)\left(5\right)\therefore\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=50-\left(1+3+6+10\right)$, ou seja, para $n=4$, temos $\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=50-20=30=\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6}=\frac{4\cdot(4+1)(2\cdot 4+1)}{6}$. Em seguida, sugere um diagrama semelhante para prever o comportamento padrão para a soma de $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$, e usando o mesmo raciocínio, podemos escrever:

$$\underbrace{\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\right)}_{\text{números quadrados}}+\underbrace{\left(1+3+6+10+15\right)}_{\text{linhas horizontais}}=\underbrace{\left(1+2+3+4+5\right)}_{\text{base do retangulo}}\underbrace{\left(4+2\right)}_{\text{altura}}\therefore$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=15\cdot 6-(1+3+6+10+15)=90-35=55=\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}=\frac{5\cdot(5+1)\cdot(2\cdot 5+1)}{6}$$

Figura 6: Diagrama generalizado de Burton (2006).



Em seguida, dado $n \in IN$, o autor escreve $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$. Burton (2006, p. 109) observa que as dimensões do retângulo no n-ésimo passo são de $(1+2+3+\cdots+n)(n+1)$. E que a outra parcela pode ser descrita por $\Big(\underbrace{1+3+6+10+....+(1+2+....+n)}_{linhas\ horizontais}\Big) = \big((1)+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)\big)$, ou podemos escrever ainda: $\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Agrupando todos os termos e usando a relação generalizada, baseada no diagrama: $S+\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)=(1+2+3+\cdots+n)(n+1)=$

$$S+\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+.......+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+1) \leftrightarrow S+\frac{1}{2}\big(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)\big)=\frac{n(n+1)^2}{2},$$

ou ainda, reagrupando os termos desta soma: $S+\frac{1}{2}\big(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)\big)=\frac{n(n+1)^2}{2} \leftrightarrow$

$$S+\frac{1}{2}\big(1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\cdots+n(n+1)\big)=\frac{n(n+1)^2}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow S+\frac{1}{2}\big(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+(1+2+3+\cdots+n)\big)=\frac{n(n+1)^2}{2} \leftrightarrow S+\frac{1}{2}\left(S+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)^2}{2}$$

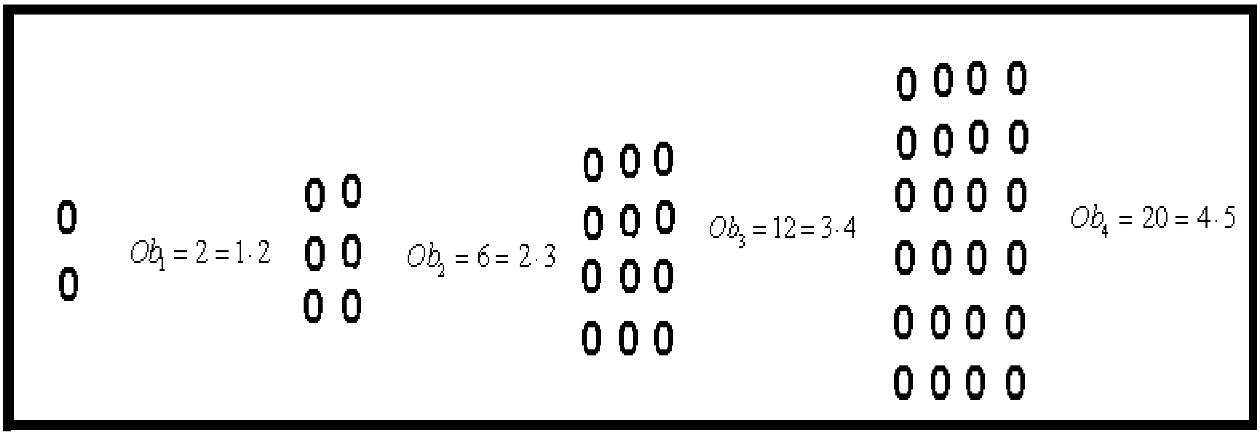
$$\leftrightarrow S+\left(\frac{S}{2}+\frac{n(n+1)}{4}\right)=\frac{n(n+1)^2}{2} \leftrightarrow \frac{3S}{2}=\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)}{4}=\frac{(n+1)(2n(n+1)-n)}{4}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$$

Finalmente, Burton (2006, p. 103) conclui que $\frac{3S}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4} \leftrightarrow S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Nossa próxima discussão envolve as configurações da figura abaixo que caracterizam os números que não representavam quadrados perfeitos, chamados *oblongos* (KLINE, 1972, p. 30) ou *números retangulares*. A partir delas, escrevemos a adotamos a seguinte notação: $Ob_1=2=1\cdot 2$; $Ob_2=6=2\cdot 3$; $Ob_3=12=3\cdot 4$; etc..

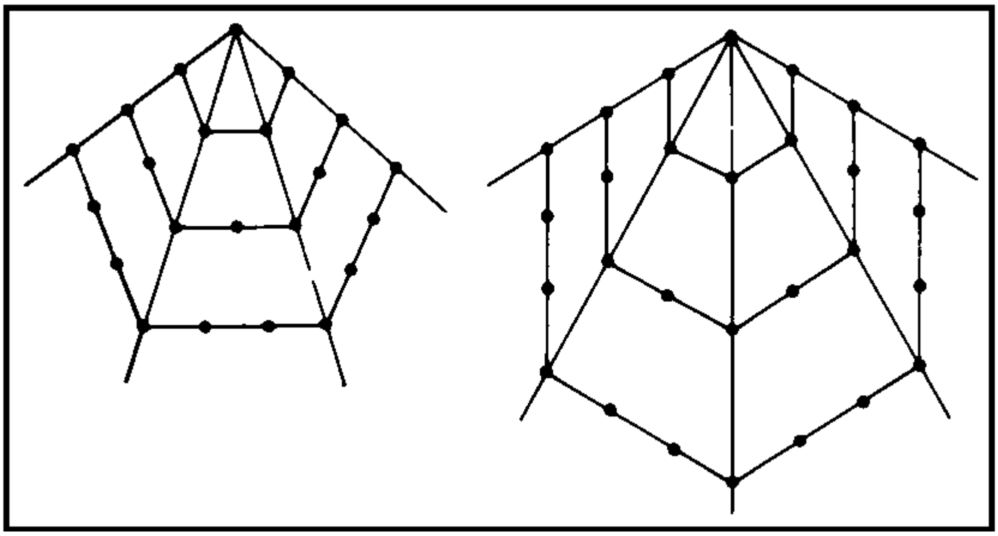
Conjecturamos que, prosseguindo com o mesmo raciocínio indutivo, para $n \in IN$ e $n \geq 1$, escrevemos o *n-ésimo número oblongo* por $Ob_n = n\cdot(n+1)$ (figura 6).

Figura 7: Números oblongos (elaboração própria).



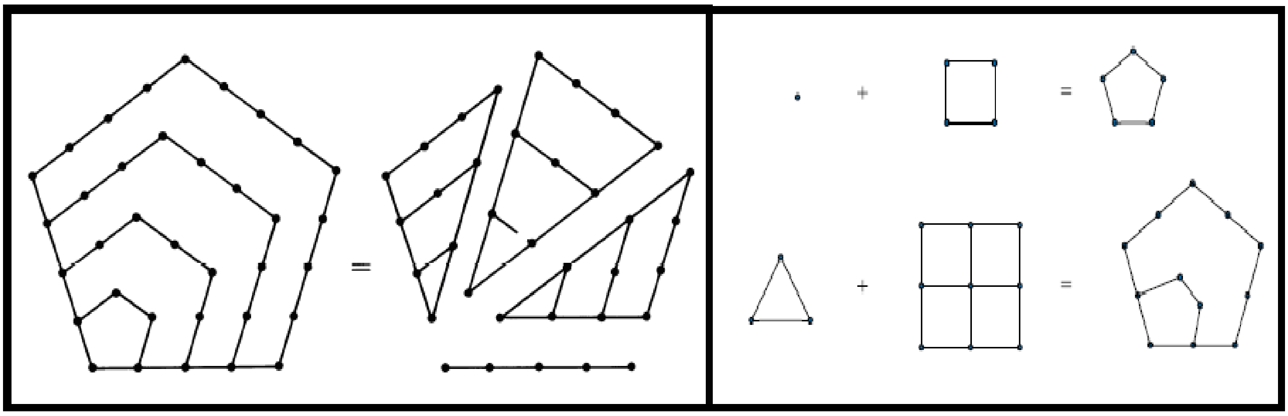
Kline (1972, p. 31-32) explica uma possível regra para a obtenção dos demais *números figurais*.

Figura 8: Formas de obtenção dos demais *números figurais* descritas por Kline (1972, p. 32).



Vamos consultar mais uma vez a figura 2 e descrever os *números pentagonais* (EVES, 1969, p. 55) pelo conjunto $\{1,5,12,22,....\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4,.....\}$. Mas reparemos que $P_1 = 1 = \frac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{2}$, $P_2 = 5 = 1+4 = 1+(3\cdot 2-2) = \frac{2\cdot(3\cdot 2-1)}{2}$, $P_3 = 12 = 1+4+7 = 1+4+(3\cdot 3-2) = \frac{3\cdot(3\cdot 3-1)}{2}$, $P_4 = 22 = 1+4+7+(3\cdot 4-2)$. Por indução, conjecturamos que $P_n = 1+4+7+\cdots+(3\cdot n-2)$. No que segue, estabelecemos por *indução matemática* que: $P_n = 1+4+7+\cdots+(3\cdot n-2) = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$. Por outro lado, Eves (1969, p. 56) observa, ainda, que $P_n = \frac{n\cdot(3n-1)}{2} = n+3\left[\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right] = n+3\cdot T_{n-1}$. Que verifica a relação com os *números triangulares* e que pode ser conjecturada a partir do seguinte diagrama.

Figura 9: Decomposição de um *número pentagonal*, sugerido por Eves (1969, p. 56) e suas relações com os *números triangulares* e *quadrados* observados em Koshy (2007, p. 47).



Observando o diagrama acima, do lado direito, escrevemos: $T_1 + \square_2 = P_2$; $T_2 + \square_3 = P_3$; $T_3 + \square_4 = P_4$; ....; $T_n + \square_{n+1} = P_{n+1}$. Com base nestes resultados, demonstramos facilmente dois teoremas.

Teorema 6: O único número pentagonal primo é o 5.

Demonstração: Supondo que n é par, digamos que $n = 2k \therefore Pent_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ para $n \geq 1$. Assim, teremos ~~que~~ $Pent_{2k} = \frac{2k(3 \cdot 2k - 1)}{2} = k(6k-1) \leftrightarrow \begin{cases} se\ k = 1 \to 1 \cdot (6-1) = 5 \\ se \text{ k>1 não pode ser primo!} \end{cases}$.

Agora analisemos o caso em que $n = 2k+1$, observando que $\therefore Pent_{2k+1} = \frac{(2k+1)(3(2k+1)-1)}{2} = \frac{(2k+1)(6k+2)}{2} = (2k+1)(3k+1)$ que do mesmo modo não pode ser primo.

Teorema 7: Qualquer número pentagonal é um terço de um número triangular.

Demonstração: Já vimos que $Pent_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. Assim, fazendo

$$m = 3n - 1 \leftrightarrow n = \frac{m+1}{3} \leftrightarrow \frac{\frac{m+1}{3} \cdot m}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{3} \times T_m .$$

Nossos próximos números figurais gregos a ser discutidos são chamados de *números hexagonais*. Os autores Conway & Guy (1969) fornecem a seguinte lista numérica $\{1, 6, 15, 28, 65, ...\} = \{Hex_1, Hex_2, Hex_3, Hex_4, ...\}$.

A partir dela, observamos que $Hex_1 = 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$, $Hex_2 = 6 = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)$, $Hex_3 = 15 = 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1)$; $Hex_4 = 26 = 4 \cdot (2 \cdot 4 - 1), ...$

Por outro lado, para verificar que $n+1 \in \Re := \{n \in IN \mid \mathrm{Hex}_n = n \cdot (2n-1)\}$, empregamos as relações:

$$Hex_1 = T_1 \ ; Hex_2 = P_2 + T_1 \ ; Hex_3 = P_3 + T_2 ; ....; \ Hex_n = P_n + T_{n-1} = \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3n^2 - n + n^2 - n}{2} =$$

$$= 2n^2 - n = n \cdot (2n-1)$$

Figura 10: Os *números hexagonais* descritos por Conway & Guy (1969, p. 40).

Teorema 8: Todo *número hexagonal* é um *número triangular*.

Demonstração: De fato, sabemos que $Hex_n = n(2n-1) = n + 4 \cdot T_{n-1}$. Assim, segue que

$$= (n + T_{n-1}) + 3 \cdot T_{n-1} = T_n + 3 \cdot T_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2} \overset{m=2n-1}{=}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} = T_m \text{ (triangular de ordem m) onde m=2n} - 1$$

Com base nas propriedades discutidas até agora, enunciamos as seguintes propriedades.

Proposição: Com relação aos números figurais, temos as seguintes relações.

a) $P_n = n + 3 \cdot T_{n-1}$ b) $Hex_n = 4 \cdot T_{n-1} + n$

Demonstração: No item (a) sabemos que $Pent_n = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{2n + 3n^2 - 3n}{2} = n + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n + 3 \cdot T_{n-1}$. No item (b) Sabemos que $Hex_n = n(2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{4n^2 + 2n - 4n}{2} = \frac{4 \cdot n(n-1)}{2} + \frac{2n}{2} = 4 \cdot T_{n-1} + n$.

Para concluir esta seção, Conway & Guy (1996, p. 39) descrevem uma maneira analítica engenhosa de obtermos os *números heptagonais*, *octogonais*, etc...a partir das relações:

$$\begin{aligned} n + T_{n-1} &= T_n \\ n + 2 \cdot T_{n-1} &= \square_n \\ n + 3 \cdot T_{n-1} &= P_n \\ n + 4 \cdot T_{n-1} &= Hex_n \\ n + 5 \cdot T_{n-1} &= Hept_n \\ n + 6 \cdot T_{n-1} &= Oct_n \\ n + 7 \cdot T_{n-1} &= Non_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Podemos comparar agora a figura 6 com estas relações acima. Ademais, Hindin (1978, p. 561) fornece a seguinte fórmula geral $p_n^r = \frac{n[(r-2)n - r + 4]}{2}$, onde $n \geq 1$ e $r \geq 3$ descreve o *n-ésimo número figural de* *r* lados. Tal descrição proporciona uma descrição, de imediato, para qualquer um dos números que discutimos até agora, por meio desse modelo generalizado.

OS NUMEROS FIGURAIS EM 3D

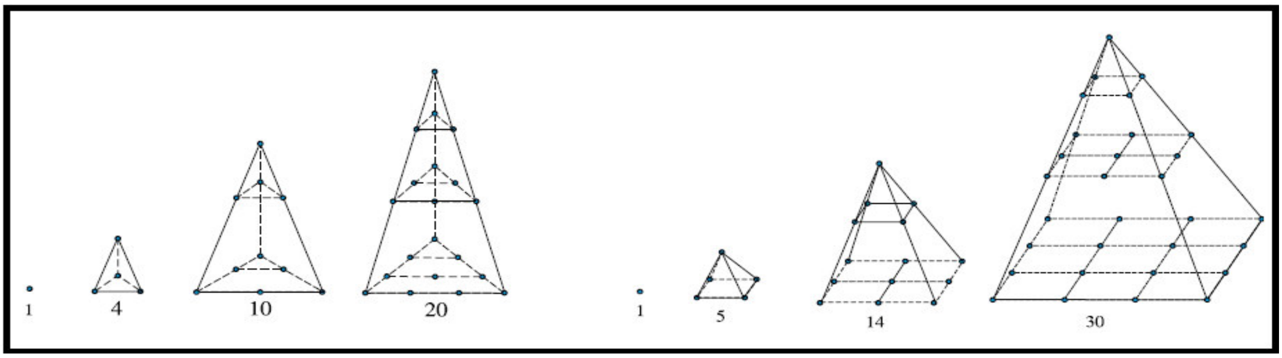
Popper (1972, p. 106) menciona sem maiores explicações que o raciocínio grego aplicado às formas geométricas planas, foi estendido aos sólidos, apesar das dificuldades de identificar as configurações em 3D que sugerem a discussão dos *números piramidais*, ou mais especificamente, *números piramidais triangulares*, *números piramidais quadrados*, *números piramidais pentagonais* (KOSHY, 2007).

Estrada el al (2000, p. 232) faz um comentário interessante quando observa que

> a busca de esquemas retangulares para representar os números terá conduzido ao conceito de divisibilidade. Os números primos são os que apenas admitem a representação retangular, trivial (todos dispostos numa só fila). Pelo contrário, os números que admitem uma ou mais representações retangulares não triviais diziam-se números planos (depois ditos números compostos). Daí é fácil passar também à consideração dos números com representação tridimensional não trivial, que se chamaram números sólidos.

Na figura abaixo exibimos os primeiros números sólidos.

Figura 10: Os *números piramidais* discutidos por Koshy (2007).



Os primeiros são obtidos tomando-se sucessivamente os correspondentes números figurais em 2D. Para tanto, Koshy (2007, p. 49) apresenta os *números piramidais*. Os mesmos são constituídos a partir dos números triangulares da seguinte forma: $Pir_3^1 = 1$, $Pir_3^2 = T_1 + T_2 = 1+3 = 4$, $Pir_3^3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1+3+6 = 10$, $Pir_3^4 = 20$.

De um modo geral, determinam-se $Pir_3^n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

Por outro lado, já inferimos há pouco que um *número triangular* por ser descrito por $T_i = \frac{i(i+1)}{2}$, assim, substituindo, decorre que: $Pir_3^n = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$. Por outro lado, podemos mostrar por *indução matemática* que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \underset{Indução}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{6(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} = \binom{n+2}{3}.$$

Consequentemente, podemos escrever daqui por diante, o *i-ésimo número piramidal de base triangular* $\left(Pir_3^i\right)$ como um elemento presente no *triângulo de Pascal*. Na figura abaixo, Koshy (2007) descreve a maneira recorrente de obtenção dos *números piramidais* de base triângular, para ordens mais elevadas.

Figura 11: Modo recorrente de se obter os números piramidais segundo Koshy (2007).

n	1	2	3	4	5	6	.	.	.	n
t_n	1	3	6	10	15	21	.	.	.	$n(n+1)/2$
T_n	1	4	10	20	35	?	.	.	.	?

Podemos inferir a partir da tabela acima que: $35 = 20 + 15 \therefore Pir_5^3 = Pir_4^3 + T_5$. De modo geral, por *indução matemática*, escrevemos $Pir_n^3 = Pir_{n-1}^3 + T_n = Pir_{n-1}^3 + \frac{n(n+1)}{2}$, para $n \geq 1$. Com o mesmo raciocínio, a partir dos *números figurais* no plano, definimos os *números piramidais* de base quadrada por: $Pir_4^1 = 1,\ Pir_4^2 = 5,\ Pir_4^3 = 14,\ Pir_4^4 = 30$. Na sequência, Koshy (2007, p. 50) fornece os *números piramidais* de base quadrada em suas disposições espaciais.

Na tabela abaixo vemos as indicações de Koshy (2007, p. 51) para obter seus valores numéricos correspondentes. De fato, vemos que $55 = 30 + 25 \therefore Pir_n^4 = Pir_{n-1}^4 + \square_n$. Mais ainda, podemos escrever um *número piramidal* qualquer, de base quadrada, por $Pir_n^4 = \sum_{i=1}^{n} \square_i = \sum_{i=1}^{n} i^2{}_i \underset{Indução}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Figura 12: Obtenção dos *números piramidais* a partir dos *números quadrados* segundo Koshy (2007).

n	1	2	3	4	5	.	.	.	n
s_n	1	4	9	16	25	.	.	.	n^2
S_n	1	5	14	30	55	.	.	.	?

Vamos definir, agora, os números *piramidais de base pentagonal*. Denotamos e definimos a partir da sequência dos *números pentagonais* $\{1, 5, 12, 22, \ldots.\}$; estes entes por: $Pir_5^1 = 1,\ Pir_5^2 = 6 = 1 + 5,\ Pir_5^3 = 18 = 6 + 12,\ Pir_5^4 = 40 = 18 + 22, Pir_5^5 = 75 = 40 + 35$. Na tabela abaixo fornecida por Koshy (2007, p. 51) estabelecemos $Pir_n^5 = Pir_{n-1}^5 + Pent_n = Pir_{n-1}^5 + \frac{n(3n-1)}{2}$, para $n \geq 1$.

Figura 13: Modo recorrente de se obter os números piramidais segundo Koshy (2007)

n	1	2	3	4	5	.	.	.
p_n	1	5	12	22	35	.	.	.
P_n	1	6	18	40	75	.	.	.

Por fim, Koshy (2007, p. 52) descreve a forma de obtenção dos *números piramidais hexagonais* ou de base hexagonal. A partir da tabela, observamos as relações $Pir_6^1 = 1$; $Pir_6^2 = 7 = 1 + 6$; $Pir_6^3 = 22 = 15 + 7$; $Pir_6^4 = 50 = 28 + 22$; $Pir_6^5 = 95 = 45 + 50$. Partindo deste diagrama, podemos escrever $Pir_n^6 = Pir_{n-1}^6 + Hex_n = Pir_{n-1}^6 + n \cdot (2n-1)$, para $n \geq 1$.

Figura 14: Obtenção dos *números piramidais* a partir dos *números hexagonais* segundo Koshy (2007).

n	1	2	3	4	5	.	.	.	n
h_n	1	6	15	28	45	.	.	.	?
H_n	1	7	22	50	95	.	.	.	?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Discutimos nas seções passadas a noção de *números figurais* que se constitui um tópico recorrentemente abordado por vários autores de artigos e livros de Historia da Matemática (ALVES, BORGES NETO & MACHADO, 2008; ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2012; BURTON, 2006; ESTRADA et al. 2000; FAUVEL & MAANEN, 2002; FOSSA, 2001; KLINE, 1972) de qualidade reconhecida; entretanto, ao decorrer do desenvolvimento do texto, dentre os tipos de abordagens observadas, assumimos aquela que assume a relevância do estudo da Matemática por meio de sua história e epistemologia.

Deste modo, apesar de não nos furtarmos de indicar suas raízes filosóficas, que marcaram *mudanças epistemológicas* (POPPER, 1972) na civilização que mais contribuiu na ciência que hoje, chamamos no Ocidente de Matemática. Explicitamos, sobretudo, os *modelos matemáticos* que apóiam e indicam a validade de inúmeras propriedades empregadas de modo informal, no passado, pelos gregos.

Note-se que a perspectiva grega é sublinhada por Gundlach (1969, p. 33) quando destaca que o grego em geral, "vislumbrava a Matemática com mais do que Geometria e Aritmética. E desde os seus primeiros trabalhos, os gregos consideravam os números como um todo, e não nos admiramos que eles se esforçaram em representar números como formas geométricas.". Ademais, alguns autores registram repercussões desta visão integradora inaugurada pelos helênicos, neste sentido, Aleksandrov (1956, p. 30) sublinha que "na interação entre o aritmético e o geométrico podemos ver que o desenvolvimento da Matemática é um processo conflituoso entre vários elementos contrastantes.".

Nosso questionamento final se volta para a visão adquirida e o perfil construído do professor egresso de um curso de graduação. E neste contexto de discussão, a partir das considerações de Gaspar (2003) podemos extrair questionamentos inquietantes na medida em que sua formação com respeito à dimensão histórica e a compreensão da natureza epistemológica, envolvida, poderão atuar como fatores determinantes em seu "modelo de ensino".

Apoiamo-nos na perspectiva de Choquet (1963, p. 43) quando adverte que "o principal objetivo é fornecer aos nossos alunos alguns instrumentos e ensiná-los como aplicá-los"; entretanto, no ensino de Matemática o grande questionamento recai sobre o problema referente à que "metodologia" se apropriar, no período de formação acadêmica, que possibilite a concretização e "aplicação" adequada dos conceitos matemáticos, todavia, como indicamos no início deste artigo, tal opção metodológica estará relacionada com os elementos adquiridos de sua própria experiência como estudante no decurso de sua graduação.

Como apontamos ao decorrer do texto, o domínio aprofundado de tópicos de História da Matemática "aplicáveis" ao contexto escolar pode estimular uma *práxis* não apenas ancorada no *método axiomático* (CHOQUET, 1963), o qual, nem sempre funciona de modo produtivo ao entendimento do estudante. Mas também uma "mediação pedagógica" que estimule a visão conceitual, integradora dos conteúdos no interior da própria Matemática, semelhantemente ao que foi inaugurada de modo ímpar, pelos gregos.

REFERÊNCIAS

ALVES. Francisco. Regis & BORGES NETO. Hermínio. A existência da Sequência de Fibonacci no Campo do inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. In: Boletim GEPEM, 135-140, nº 59. 2012, Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=archive

ALEKSANDROV, A. D. **Mathematics**: its content, methods and meaning. Cambridge: MIT Press, 1956.

ALVES, Francisco Regis V. Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com suporte computacional. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 9., 2011, Sergipe, **Anais do Seminário Nacional de História da Matemática**, Sergipe, 2011 p. 1-12. Disponível em:<http://snhm2011.blogspot.com/>. Acesso em: 04 de novembro de 2011.

ALVES, Francisco Regis V; BORGES NETO, Hermínio; MACHADO, Rosélia Castro. Matemáticos educadores e suas reflexões pedagógicas. In: Colóquio de Historia e Tecnologia no Ensino de Matemática, 4.,. 2008, Rio de Janeiro. **Anais do Colóquio de Historia e Tecnologia no Ensino de Matemática Sergipe**, 2008.p. 1-8. Disponível em: <http://limc.ufrj.br/htem4/artigos.htm>. Acesso em: 04 de novembro de 2011.

ANGLI, W. S. & LAMBEK, J. **The heritages os Talles**. New York: Springer, 1995.

BRADLEY, Michael J. **The birth of Mathematics**. New York: Chelsea House, 2006.

BURTON, David M. **The History of Mathematics**. New York: Mc-Graw Hill, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CHOQUET, Gustav. **What is Modern Mathematics**. England: Educational Explores Readind, 1963.

CONWAY, John H. & GUY, Richard. **The book of Number**. New York: Springer Verlag, 1996.

DALMEDICO, Amy D. & PEIFFER, Jeanne. **Une Histoire des Mathematiques**. Paris: Édition Seuil, 1986.

ESTRADA, Maria F. *et al.* **História da Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, Howard. **An introduction to the History of Mathematics**. 3. ed. Chicago: Holt, Reinhardt and Wilson ltd, 1969.

EVES, Howard. **Great Moments in Mathematics**: before 1650. New York: American Association of America, 1983.

FAUVEL, John & MAANEN, Jan Van. **History in Mathematics Education**. New York: Klumer Academic Publishers, 2002.

FOSSA, John A. A história da Matemática como uma fonte de atividades matemáticas. In: _____. **Ensaios sobre a Educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. p. 57-65.

GASPAR, Maris T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 2003. Xx f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GUNDLACH, Bernard H. **Historical topic for the Mathematics Classroom**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

KATZ, Victor. **A History of Mathematics**. New York: Addison Wesley, 1998.

Recebido: 21/11/2011
Aprovado: 05/03/2012

.