

SOBRE A SEQUÊNCIA DE LICHTENBERG E A ABORDAGEM VIA TABULEIRO COM LADRILHOS: ASPECTOS MATEMÁTICOS E HISTÓRICOS

¹FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES, ²PAULA CATARINO

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE),

² Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD)

<fregis@ifce.edu.br> <pcatarin@utad.pt>

DOI: 10.21439/conexoes.v20.4157

Resumo. Os trabalhos sobre sequências numéricas recorrentes, dentre inúmeras abordagens e formas de generalização, preservam a atenção de pesquisadores de vários países. O presente trabalho declara interesse pela sequência recorrente de 3ª ordem que determina os números de Lichtenberg, cuja denominação se deve ao trabalho do matemático e físico alemão Georg Christoph Lichtenberg (1742 – 1799). Lichtenberg desenvolveu uma abordagem e descrição matemática correspondente ao antigo quebra-cabeça dos ‘anéis chineses’. Assim, a partir da constatação de inúmeras propriedades que permitem correlacionar os números de Jacobsthal com os números de Lichtenberg, pode-se verificar a descrição do Tabuleiro de Lichtenberg, a partir da elaboração de certas regras de composição de ladrilhos e novas propriedades aritméticas via ladrilhos previamente fixados.

Palavras-chave: sequência de Lichtenberg; aspectos históricos; sequência de Jacobsthal; tabuleiro e ladrilhos.

ON THE LICHTENBERG ´S SEQUENCE AND THE APPROACH BY BOARD AND TILES: MATHEMATICAL AND HISTORICAL ASPECTS

Abstract. Studies on recurring numerical sequences, among numerous approaches and forms of generalization, retain the attention of researchers from various countries. This work expresses interest in the 3rd-order recurring sequence that determines Lichtenberg numbers, named after the work of the German mathematician and physicist Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799). Lichtenberg developed a mathematical approach and description corresponding to the ancient puzzle of the ‘Chinese rings’. Thus, based on the observation of numerous properties that allow correlating Jacobsthal numbers with Lichtenberg numbers, it is possible to verify the description of the Lichtenberg grid, from the elaboration of certain rules for composing tiles and new arithmetic properties via previously fixed tiles.

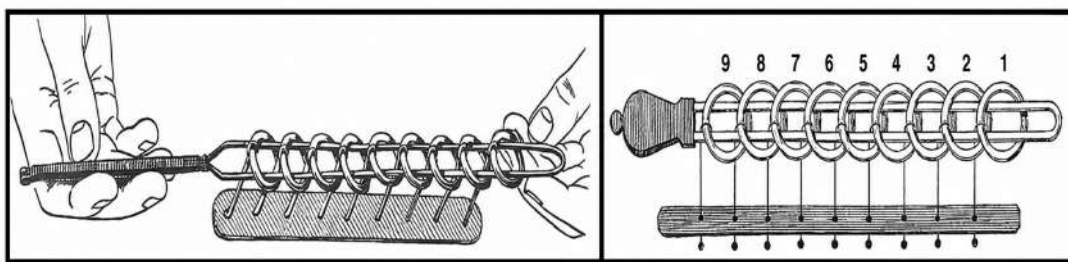
Keywords: Lichtenberg sequence; historical aspects; Jacobsthal sequence; board and tiles.

1 INTRODUÇÃO

Os anéis chineses aparecem como um quebra-cabeça bem conhecido em muitos trabalhos sobre matemática recreativa (Grimaldi, 2012; Rougetet, 2024). Heeffer e Hinz (2017) explicam que, no contexto europeu e, de modo especial, no contexto de algumas obras francesas do século XIX, tal quebra-cabeça recebeu o nome de 'anéis de cardan' como tradição da obra intitulada 'De subtilitate' elaborado por Girolamo Cardano (1501 – 1576). Na Figura 1, ao lado esquerdo, Heeffer e Hinz (2017) explicam uma interpretação moderna, peculiar ao século XIX, do quebra-cabeça chinês.

E, na mesma figura, ao lado direito, os autores Hinz; Klavzar; Milutinovic; Petr (2013) discutem a tarefa de retirar todos os anéis de uma barra horizontal e que, sob certas regras, com uma quantidade fixada de 9 anéis metálicos. Hinz (2017) assinala, por exemplo, um episódio histórico em 1769 envolvendo o físico, escritor e matemático alemão Georg Christoph Lichtenberg (1742 – 1799) e o matemático japonês Yoriyuki Arima (1714 – 1783). O episódio, como explica Hinz (2017) se relaciona com a noção de sequências de inteiros e com indução matemática. Ademais, o autor constata que “ambos os autores tratam da solução do antigo quebra-cabeça dos anéis chineses, onde anéis de metal são movidos para cima e para baixo em um arranjo mecânico muito sofisticado”. (Hinz, 2017, p. 2).

Figura 1: Descrição do antigo quebra-cabeça dos anéis chineses sobre uma barra.



Fonte: Heeffer; Hinz (2017) e Hinz; Klavzār; Milutinovic; Petr (2013, p. 71).

Podem ser constatadas diferentes abordagens sofisticadas e estratégias para resolver o mesmo problema matemático. De modo geral, tanto o matemático alemão German Georg Christoph Lichtenberg e o matemático japonês Yoriyuki Arima conseguem determinar o número de movimentos (necessários) para resolvê-lo na presença de 'n' anéis metálicos. Por outro lado, enquanto Lichtenberg considera todos os movimentos dos anéis, o matemático japonês Y. Arima se concentra apenas nos movimentos para baixo do primeiro anel. (Hinz, 2017).

Hinz (2017, p. 4) assinala que a abordagem do problema por Lichtenberg que, inicialmente empregava a noção de anéis chineses permitiu, um tempo depois, “repercussão da noção para outros brinquedos da cidade alemã, o que demonstrou sua importância contínua na indústria de brinquedos do país”. Lichtenberg forneceu, sem muitos detalhes, a seguinte lista ou conjunto dos números de Lichtenberg: 0, 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341, 682, . . . (*).

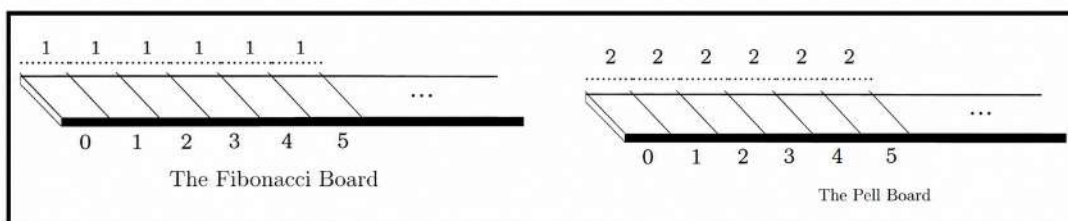
Quando se examina de perto a seguinte lista dos números indicados em (*) e a partir do trabalho de Hinz (2017), se constata o estabelecimento da correspondência e descrição do conjunto $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ via a recorrência $L_{i_{n+1}} = L_{i_n} + 2L_{i_{n-1}} + 1$, $L_{i_0} = 0$, $L_{i_1} = 1$ (**). Mais recentemente, Cerda-Morales (2025) descreve outras fórmulas indutivas e que se relacionam com que denomina por números de Lichtenberg, por exemplo, definidos por Lichtenberg a partir da seguinte relação $L_{i_n} + L_{i_{n-1}} = 2^n - 1$, $n \geq 1$. Ademais, tanto Hinz (2017) e Cerda-Morales (2025) acentuam íntima relação envolvendo a sequência de Lichtenberg indicada em (**) e outro conjunto de números que indica-se pela seguinte lista: 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, . . .

A lista numérica anterior que envolve apenas números ímpares (Horadam, 1961; 1965; 1996) e que, de modo *standard*, diz respeito aos números de Jacobsthal.

Definição 1: Para todo inteiro $n \geq 0$, diz-se que o conjunto dos números de Jacobsthal $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é determinado pela seguinte recorrência de 2ª ordem $J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, com valores iniciais $J_0 = 0$, $J_1 = 1$.

Constata-se que a abordagem combinatória e propriedades descritas via a noção de Tabuleiro com ladrilhamentos. Neste sentido, coloca-se ênfase nos trabalhos de Benjamin e Quinn (2003), Koshy (2017; 2019) e Tedford (2019). Para exemplificar, na Figura 2, pode ser visualizado um expediente intuitivo e mnemônico ao representar os Tabuleiros, como entidades descritas em 3D.

Figura 2: Descrição dos Tabuleiros de Fibonacci e Pell segundo Koshy (2017).



Fonte: Koshy (2017).

Benjamin e Quinn (2003) e Spreafico (2014) descrevem a noção de um n -tabuleiro, mediante a formulação de uma definição. Nesses termos, adota-se a formulação mais recente do segundo autor, tendo em vista sua abordagem moderna para problemas envolvendo a representação de sequências via Tabuleiros.

Definição 2: (Tabuleiro). O tabuleiro é uma formação de quadrados denominados por casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essa enumeração descreve a posição. Um tal tabuleiro será chamado apenas de n -tabuleiro (Spreafico, 2014).

Por outro lado, se mostra imprescindível considerar o registro inúmeros casos de sequências numéricas recorrentes recentemente introduzidas na literatura e que não possuem uma representação e interpretação combinatória via Tabuleiro e ladrilhamentos (Soykan, 2023a; 2023b; 2023c; 2023d). Em contraste, por exemplo, quando se menciona os casos das sequências numéricas de *Fibonacci* (Gullberg, 1997; Stakov, 2009; Vorobiev, 2000), de *Lucas*, de *Pell* e de *Jacobsthal*, tal conjunto de sequências numéricas possui ampla tradição de trabalhos envolvendo sua abordagem combinatória via Tabuleiro e ladrilhamentos (Gökbas, 2023).

Desse modo, a partir do contexto anterior, o seguinte questionamento é indicado: como descrever propriedades correspondentes com a sequência de Lichtenberg, com a utilização da noção de Tabuleiro e com propriedades com ladrilhamentos?

2 A SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL E SUA REPRESENTAÇÃO VIA TABULEIROS

Podem ser verificados trabalhos interessados pelas formas de generalização e descrição de extensões da sequência de Jacobsthal e ao considerar a recorrência de 2ª ordem $J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$. A partir dos trabalhos de Horadam (1961; 1965), ocorre uma correspondência com a recorrência anterior, mediante a equação característica $x^2 = x + 2$ e determina-se, como consequência, as seguintes raízes $\{\alpha, \beta\} = \{2, -1\}$. Dessa forma, o enunciado do Teorema 1 permite descrever o termo geral ou fórmula de Binnet (Alves, 2017) correspondente ao conjunto dos números de Jacobsthal $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 1: Para todo inteiro $n \geq 0$, a fórmula de Binnet correspondente ao conjunto dos números de Jacobsthal $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dado por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Demonstração: Para todo inteiro $n \geq 0$, considera-se o seguinte termo geral para os números do conjunto $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e escreve-se por $J_n = x \cdot 2^n + y \cdot (-1)^n$. Sabendo os valores iniciais que determinam tal conjunto, sendo que $J_0 = 0$, $J_1 = 1$. Podem ser determinados os coeficientes por $J_0 = x + y = 0$, $J_1 = 2x - y = 1$, com $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$. ■

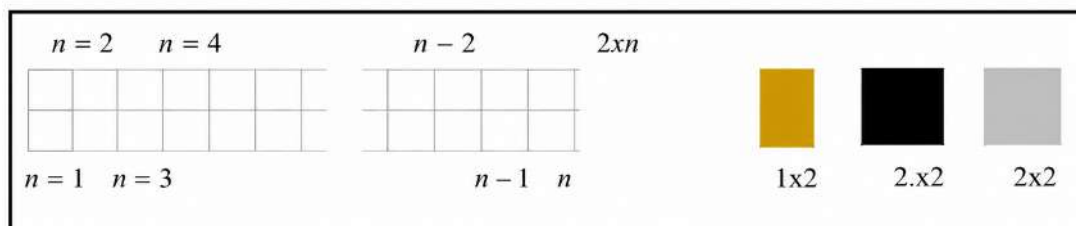
Teorema 2: Para $n \geq 0$, vale a soma indicada por

$$2 \sum_{i=0}^n J_i = J_{n+2} - J_1.$$

Demonstração: Para todo inteiro $n \geq 0$, basta realizar determinados cancelamentos sucessivos decorrentes diretamente da relação recursiva $J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$. ■

Koshy (2019) formulou um Tabuleiro com dimensão $2xn$ e considerou um conjunto de três ladrilhos, a saber: um dominó horizontal $1x2$, um dominó vertical $2x1$, um quadrado Koshy (2019) formulou um Tabuleiro com dimensão $2xn$ e considerou um conjunto de três ladrilhos, a saber: um dominó horizontal $1x2$, um dominó vertical $2x1$, um quadrado $2x2$. Considerando que no modelo proposto por Koshy (2019) não ocorre a necessidade da descrição de nenhuma hierarquia ou regras com ladrilhos correspondentes com as cores particulares do conjunto supramencionado. Desse modo, uma adaptação ao modelo de Tabuleiro e ladrilhos pode ser introduzida e que, segundo Koshy (2019), possibilita descrever relações com a sequência de Jacobsthal. Com efeito, considerando um Tabuleiro com dimensões $2xn$ e determinando um conjunto $\mathfrak{S}$ de três ladrilhos, a saber: um dominó vertical marrom $1x2$, um quadrado preto e um cinza $2x2$.

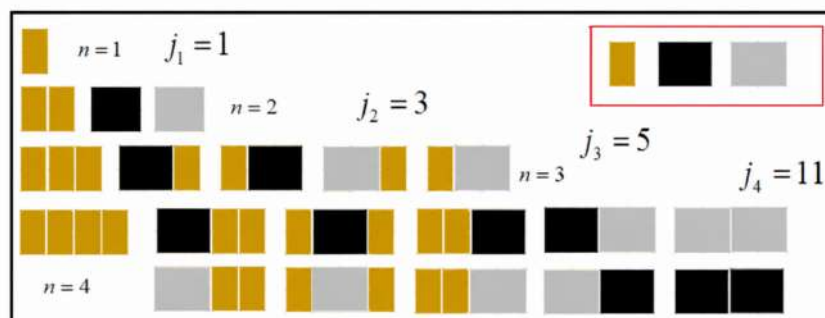
Figura 3: Tabuleiro de Jacobsthal e ladrilhos envolvendo adaptação do modelo de Koshy (2017).



Fonte: Elaboração dos autores.

Na figura 4, considerando que, a partir da recorrência, pode ser verificado que todos os números de Jacobsthal são ímpares, podem ser determinados que $j_2 = 3 = 1 + 2 \cdot 1$, $j_3 = 5 = 3 + 2 \cdot 1$, $j_4 = 11 = 5 + 2 \cdot 3$. Na figura 5, se constata um caso particular $j_5 = 21$.

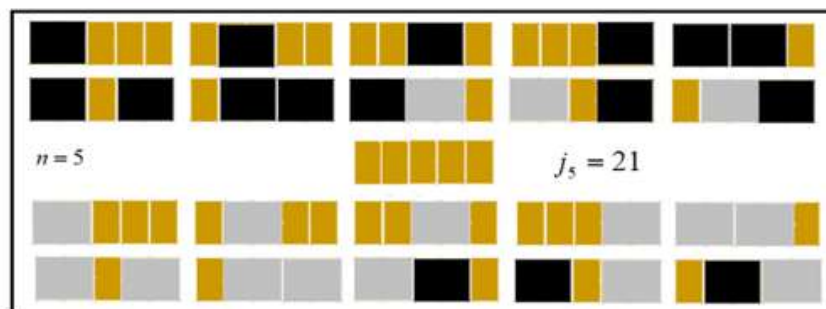
Figura 4: Descrição e casos particulares e ladrilhamentos. (n=1,2,3,4)



Fonte: Elaboração dos autores.

No Teorema seguinte são empregados os argumentos de Koshy (2019), todavia, com uma alteração dos conjuntos de ladrilhos e que não ocorre a necessidade de estabelecer nenhuma hierarquia de cores. (Khadir; Németh;

Figura 5: Casos particulares e ladrilhamentos correlacionados aos números de Jacobsthal.



Fonte: Elaboração dos autores.

Teorema 3: Considerando um Tabuleiro com ‘ n ’ células e fixados um conjunto de ladrilhos $\mathfrak{J}$ indicados por , , . Considerando ainda o elemento j_n como a quantidade de ladrilhamentos que determina-se a partir da composição dos ladrilhos, então vale a relação $j_n = J_{n+1}$, para todo inteiro $n \geq 0$.

Demonstração: Ao Definir o termo j_n como a quantidade de ladrilhamentos que se forma a partir do dominós e dos dois quadrados. Pode-se assumir que, de modo preliminar, vale que $j_0 = 1 = J_1$. Em seguida, a partir da figura 5, vê-se que $j_1 = 1 = J_2$, $j_2 = 3 = J_3$, $j_3 = 5 = J_4$, $j_4 = 11 = J_5$. Em seguida, considera-se três classes de ladrilhamentos, na medida em que fixam-se, nas células de maior ordem, isto é, de ordens $(n-1)$ e (n) , os ladrilhamentos que terminam por: i) apenas um dominós marrom ; ii) apenas por um quadrado ; iii) apenas por um quadrado . De modo preliminar, pode-se constatar que, a menos da cor particular indicada, desde que não ocorra preferência ou hierarquia de cores de ladrilhos, a quantidade de ladrilhamentos determinada nos itens ii) e iii) é a mesma e que é indicada por $j_{n-2} + j_{n-2} = 2j_{n-2}$. Por fim, no caso i), tem-se fixado na célula de ordem (n) apenas um dominós marrom . Assim, a quantidade determinada será de j_{n-1} . Por fim, observando que não se têm interseções entre os conjuntos indicados nos itens i) e ii) e i) e iii). A contribuição total será de $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$, considerando os termos iniciais $j_0 = 1 = J_1$ e $j_1 = 1 = J_2$, se depreende que o conjunto dos números $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ coincide com os números de Jacobsthal $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e vale $j_n = J_{n+1}$, $n \geq 0$. ■

Vale observar que, semelhante aos casos das sequências de Fibonacci, Lucas (Belbachir; Belkhir, 2013), bem como no caso da sequência de Jacobsthal e de outras admitem uma diversidade de representações e generalizações via Tabuleiro e ladrilhamentos. Por outro lado, quando se consulta o trabalho de Khadir; Németh e Szalay (2024), a depender do comportamento numérico da sequência e da natureza da recursão, podem ocorrer variações e mudanças nas dimensões, na hierarquia de cores.

3 SOBRE A SEQUÊNCIA DE LICHENBERG: RELAÇÕES COM OUTRAS SEQUÊNCIAS

Hinz; Klayzar; Milutinovic; Petr (2013) comentam que o matemático Yoriyuki Arima, em 1769, descreveu uma interpretação correspondente via sequências e determinou a seguinte expressão $A_n = \frac{J_n + 1}{2}$ o que confirma relação e propriedades com os números de Lichtenberg. Por outro lado, Stockmeyer (2017) desenvolve uma série de caracterizações em torno dos números de Lichtenberg. De fato, definiu Stockmeyer o termo inicial $A(1) = 1$ e a seguinte fórmula recursiva $A(2n) = 2A(2n-1)$ e $A(2n+1) = 2A(2n) + 1$. Na Tabela 1 se constata que os valores correspondem com a lista indicada em (*). Além disso, a partir dos valores indicados na Tabela 1, se

constata que vale ainda que $A(n) = \begin{cases} \frac{2^{n+1} - 1}{3}, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{2^{n+1} - 2}{3}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$

Tabela 1: Descrição de valores da sequência $A(n)$ formulada por Stockmeyer (2017).

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$	$A(10)$	$A(11)$	$\dots$
1	2	5	10	21	42	85	170	341	682	1365	$\dots$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Quando se consulta os trabalhos de Hinz (2017) e de Cerda-Morales (2025) e considerando a seguinte recorrência (não homogênea), isto é, com a presença de uma constante (não nula) e indicada pela recorrência $L_{i_{n+1}} = L_{i_n} + 2L_{i_{n-1}} + 1$, se determina a seguinte diferença dos termos da sequência de Lichtenberg indicada por $(L_{i_{n+2}} - L_{i_{n+1}}) = (L_{i_{n+1}} + 2L_{i_n} + 1) - (L_{i_n} + 2L_{i_{n-1}} + 1) = (L_{i_{n+1}} + L_{i_n} - 2L_{i_{n-1}})$. Finalmente, determina-se ainda a recorrência de 3ª ordem $L_{i_{n+2}} = 2L_{i_{n+1}} + L_{i_n} - 2L_{i_{n-1}}$, com $n \geq 1$.

Definição 3: Para todo inteiro $n \geq 0$, o conjunto dos números de Lichtenberg $\{L_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ fica determinado a partir da seguinte recorrência $L_{i_{n+2}} = 2L_{i_{n+1}} + L_{i_n} - 2L_{i_{n-1}}$, com os valores iniciais indicados por $L_{i_0} = 0$, $L_{i_1} = 1$, $L_{i_2} = 2$.

A partir da recorrência indicada na definição 3, considera-se a seguinte equação característica $x^3 = 2x^2 + x - 2$ e, vê-se o seguinte conjunto de raízes da mesma $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{2, -1, 1\}$. Assim, verifica-se a fórmula de Binnet a seguir.

Teorema 4: Para todo inteiro $n \geq 0$, a fórmula de Binnet correspondente ao conjunto dos números de Lichtenberg $\{L_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dado por

$$L_{i_n} = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} - 3}{6}.$$

Demonstração: Considerando o termo geral da forma $L_{i_n} = x \cdot \alpha^n + y \cdot \beta^n + z \cdot \gamma^n$, com $n \geq 0$ e o seguinte conjunto de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{2, -1, 1\}$. Além disso, os valores iniciais indicados são conhecidos por $L_{i_0} = 0$, $L_{i_1} = 1$, $L_{i_2} = 2$. Assim, o seguinte sistema pode ser obtido

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y + z = 1, \\ 4x + y + z = 2. \end{cases}$$

A solução ensejada será $(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$. Segue, portanto, o termo geral ou fórmula de Binnet para os elementos da forma

$$L_{i_n} = \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{6} \cdot (-1)^n - \frac{1}{6} = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot (-1)^n = \frac{2^{n+2} - 3}{6} - \frac{1}{6} \cdot (-1)^n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} - 3}{6},$$

para todo inteiro $n \geq 0$. ■

Por outro lado, a partir da recorrência indicada na definição 3, os seguintes valores numéricos particulares podem ser determinados e, também, algumas relações aritméticas

$$L_{i_0} = 0 = J_0, L_{i_1} = 1 = 0+1 = J_0+J_1, L_{i_2} = 2 = 0+1+1 = J_0+J_1+J_2, L_{i_3} = 5 = 0+1+1+3 = J_0+J_1+J_2+J_3,$$

$$L_{i_4} = 10 = 0 + 1 + 1 + 3 + 5 = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4,$$

$$L_{i_5} = 21 = 0 + 1 + 1 + 3 + 5 + 11 = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5,$$

$$L_{i_6} = 42 = 0 + 1 + 1 + 3 + 5 + 11 + 21 = J_0 + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6,$$

etc.

Portanto, a partir das relações anteriores, o seguinte Teorema é indicado.

Teorema 5: Para todo inteiro $n \geq 0$, os elementos do conjunto dos números de Lichtenberg $\{L_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ são descritos pela somatória

$$L_{i_n} = \sum_{i=0}^n J_i.$$

Demonstração: Verifica-se que

$$L_{i_0} = \sum_{i=0}^0 J_i, \quad L_{i_1} = \sum_{i=0}^1 J_i, \quad L_{i_2} = \sum_{i=0}^2 J_i.$$

No passo indutivo, se assume que

$$L_{i_n} = \sum_{i=0}^n J_i,$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Em seguida, se tem

$$\begin{aligned} L_{i_{n+1}} &= \sum_{i=0}^n J_i + 2 \sum_{i=0}^{n-1} J_{i+1} = (J_n + 2J_{n-1}) + (J_{n-1} + 2J_{n-2}) + \cdots + (J_1 + 2J_0) + (0+1) = J_{n+1} + J_n + \cdots + J_2 + 1 \\ &= J_{n+1} + J_n + \cdots + J_2 + J_1 + J_0 = \sum_{i=0}^{n+1} J_i, \end{aligned}$$

para todo inteiro $n \geq 0$. ■

Antes de concluir a seção atual, a semelhança da recorrência indicada por Hinz (2017) requer maior análise, que denota-se por $L_{i_{n+1}} = L_{i_n} + 2L_{i_{n-1}} + 1$, com $L_{i_0} = 0$, $L_{i_1} = 1$. Por exemplo, Catarino e Borges (2019) introduziram uma abordagem pioneira para o estudo da sequência de Leonardo, determinada pela recorrência $L_{e_{n+1}} = L_{e_n} + L_{e_{n-1}} + 1$.

4 O TABULEIRO DA SEQUÊNCIA DE LICHENBERG

Na presente seção descrevem-se algumas regras com ladrilhamentos que permitirão descrever uma correspondência unívoca com o conjunto dos números de Lichtenberg. Para tanto, alguns resultados indicados por Cerda-Morales (2025) são empregados e que, ao considerar o termo geral, indicado no Teorema 4, permite estabelecer o seguinte lema.

Lema 1: Para todo inteiro $n \geq 0$, vale a seguinte relação entre os elementos do conjunto de $\{L_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e os elementos do conjunto de Lichtenberg

$$L_{i_n} = \frac{J_{n+2} - 1}{2}.$$

Demonstração 1: Com efeito, os números de Lichtenberg são escritos por $L_{i_n} = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} - 3}{6}$. Pode-se verificar que

$$L_{i_n} = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} - 3}{6} = \frac{4 \cdot 2^n - (-1)^n - 3}{6} = \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2} - 1}{6} = \frac{J_{n+2} - 1}{2},$$

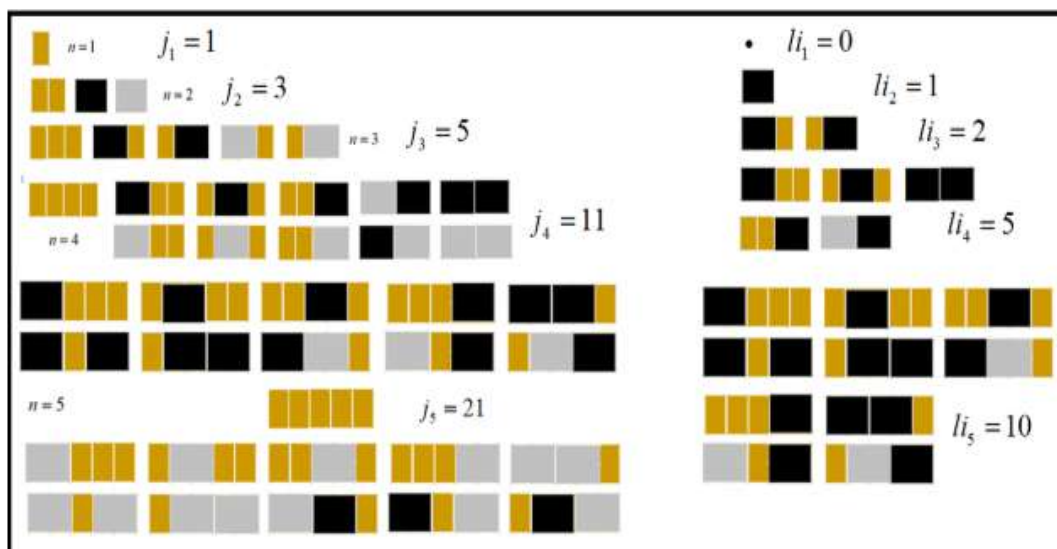
para todo inteiro $n \geq 0$. ■

Demonstração 2: Basta considerar os Teoremas 2 e 5, na medida em que se escreve a igualdade $2L_{i_n} = 2 \sum_{i=0}^n J_i = (J_{n+2} - 1)$, para todo inteiro $n \geq 0$. ■

A partir do Lema 1 determina-se um conjunto de regras envolvendo a composição do conjunto de ladrilhos, da seguinte forma: $\mathfrak{R}^{L_i}$ - para todo conjunto $\mathfrak{S}$ de ladrilhamentos determinados a partir do conjunto $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ podem ser eliminados (e desconsidera-se) os ladrilhamentos constituídos somente por dominós marrons  $1x2$; $\mathfrak{R}_2^{L_i}$ - considerando o conjunto restante de ladrilhamentos, passam-se a considerar somente aqueles que possuem, pelo menos, um quadrado (na cor cinza ou na cor preta) ocupando células de maior ordem no Tabuleiro, isto é, nas posições $(n-1, n)$.

Na figura 6, ao lado esquerdo, passam a ser considerados os ladrilhamentos correspondentes aos números de Jacobsthal e que correspondem com a quantidade de ladrilhamentos que são indicados por j_n . Por outro lado, ao consulta-se a regra $\mathfrak{R}_1^{L_i}$, passa-se a eliminar, em cada caso, os ladrilhamentos constituídos apenas de dominós marrons e reparando que, em cada conjunto o mesmos ocorrem uma única vez, isto é, considera-se a quantidade j_{n-1} . Além disso, quando considera-se os ladrilhamentos que correspondem com a quantidade j_{n-1} e, sabendo que ocorrem duplicadas às contribuições dos ladrilhos que acabam por um quadrado preto ou cinza. Assim, mediante a regra $\mathfrak{R}_2^{L_i}$ passa-se a eliminar, em cada caso, os ladrilhamentos constituídos apenas de dominós marrons e reparando que, em cada conjunto o mesmos ocorrem uma única vez, isto é, considera-se a quantidade j_{n-1} . Além disso, quando considera-se os ladrilhamentos que correspondem com a quantidade j_{n-1} e, sabendo que ocorrem duplicadas às contribuições dos ladrilhos que acabam por um quadrado preto ou cinza. Assim, mediante a regra $\mathfrak{R}_2^{L_i}$ considera-se somente metade, isto é, que acabam apenas por um dominó e um único dos quadrados fixados no conjunto dos ladrilhos indicados no Teorema 3. Considerando o termo $\{li_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ como a quantidade de ladrilhamentos que determina-se o conjunto de regras $\{\mathfrak{R}_1^{L_i}, \mathfrak{R}_2^{L_i}\}$, pode ser assumido que $li_1 = 0 = L_{i_0}$ e verifica-se diretamente que $li_2 = 1 = L_{i_1}$, $li_3 = 2 = L_{i_2}$, $li_4 = 5 = L_{i_3}$, $li_5 = 10 = L_{i_4}$.

Figura 6: Casos particulares e ladrilhamentos correspondentes com os números de Lichtenberg.



Fonte: Elaboração dos autores.

Desse modo, a partir do conjunto de regras $\{\mathfrak{R}_1^{L_i}, \mathfrak{R}_2^{L_i}\}$ o Teorema pode ser estabelecido.

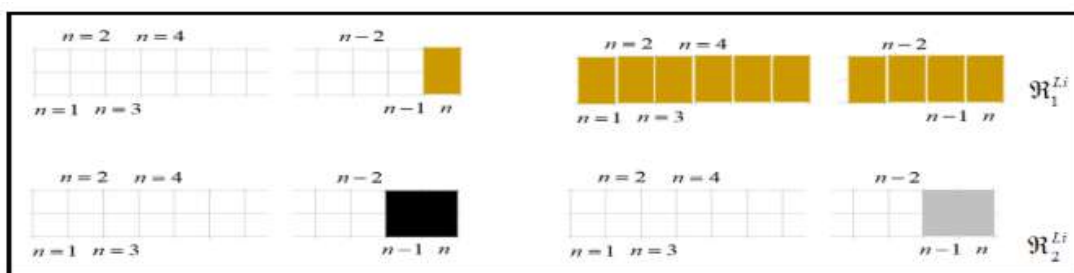
Teorema 6: Para todo inteiro $n \geq 1$, fixando um conjunto de ladrilhos $\mathfrak{S}$ e considerando o termo li_n que corresponde com a quantidade de ladrilhamentos e composições dos ladrilhos envolvendo dominó e quadrado, mediante o conjunto de regras $\{\mathfrak{R}_1^{L_i}, \mathfrak{R}_2^{L_i}\}$, então, vale a seguinte relação $li_n = \frac{j_n - 1}{2} = L_{i_{n-1}}$, onde j_n representa a quantidade de ladrilhamentos que correspondem ao conjunto dos números de Jacobsthal e $L_{i_{n-1}}$ corresponde ao número de Lichtenberg.

Demonstração: Procedendo por indução, para os casos particular $n = 1, 2, 3, 4$, pode-se escrever que $li_1 = 0 = \frac{1-1}{2} = \frac{j_1-1}{2} = \frac{j_2-1}{2} = L_{i_0}$. Para o caso $n = 2$, tem-se $li_2 = 1 = \frac{j_2-1}{2} = \frac{j_3-1}{2} = L_{i_1}$. De modo semelhante, vê-se que: $li_3 = 2 = \frac{j_3-1}{2} = \frac{j_4-1}{2} = L_{i_2}$, $li_4 = 5 = \frac{j_4-1}{2} = \frac{j_5-1}{2} = L_{i_3}$, $li_5 = 10 = \frac{j_5-1}{2} = \frac{j_6-1}{2} = L_{i_4}$. Para o passo indutivo, considerando um n Tabuleiro e assumindo que vale a seguinte relação $li_n = \frac{j_n-1}{2} = L_{i_{n-1}}$, para todo inteiro $n \geq 1$. Quando se considera o caso li_{n+1} e, mediante a aplicação das regras indicadas por $\{\mathfrak{R}_1^{L_i}, \mathfrak{R}_2^{L_i}\}$, necessita-se considerar o total de ladrilhamentos

indicados por $(j_{n+1} - 1)$. Em seguida, no conjunto dos ladrilhos, pode-se separar duas classes, que terminam por um quadrado preto e que terminam por um quadrado cinza. De modo semelhante ao Teorema 3, correspondem à mesma quantidade e, dessa forma, a seguinte quantidade é indicada $\frac{j_{n+1} - 1}{2} = \frac{J_{n+2} - 1}{2} = L_{i_n}$. Portanto, quando se busca determinar a quantidade correspondente com li_{n+1} a igualdade fundamental é estabelecida por $li_{n+1} = \frac{j_{n+1} - 1}{2} = \frac{J_{n+2} - 1}{2} = L_{i_n}$, para todo inteiro $n \geq 1$. ■

Na figura 7, apresenta-se uma interpretação das operações necessárias com ladrilhamentos decorrentes do emprego das regras do conjunto $\{\mathfrak{R}_1^{L_i}, \mathfrak{R}_2^{L_i}\}$. Ao lado direito os ladrilhamentos desconsiderados podem ser identificados. Cabe observar que compõem os ladrilhamentos necessários para estabelecer a correspondência com o conjunto (*),

Figura 7: Regras com ladrilhamentos para correspondência com os números de Lichtenberg.



Fonte: Elaboração dos autores.

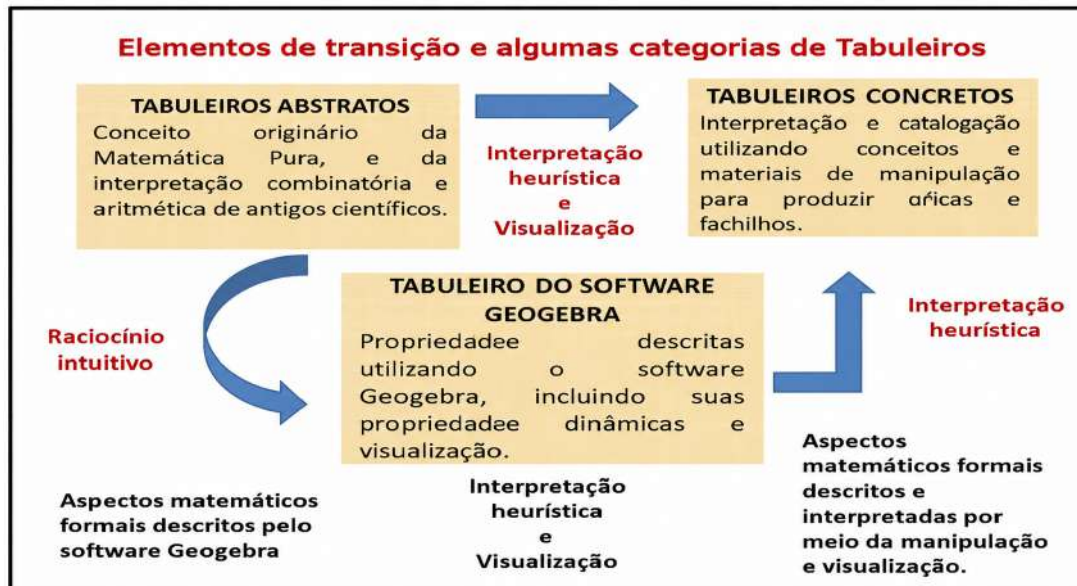
5 CONSIDERAÇÕES E PESQUISA FUTURA

Nas seções anteriores pode ser verificados aspectos de natureza histórica e de natureza matemática relacionados com os números de Lichtenberg, cuja denominação foi decorrente do trabalho de Georg Christoph Lichtenberg, embora, no âmbito da História da Matemática (Gullber, 1997; Kleiner, 2012), diversos estudiosos proeminentes se debruçaram sobre o problema do antigo quebra cabeça dos anéis chineses. Assim, como bem atestam Heeffer e Hinz (2017), figuras emblemáticas como Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517), Girolamo Cardano (1501 – 1576) e John Wallis (1616 – 1703) forneceram uma diversidade de abordagens e, em certos casos, métodos sofisticados envolvendo a solução geral do problema, envolvendo a quantidade de movimentos necessários para resolver o quebra-cabeça dos anéis chineses com n anéis.

Hinz (2017) explica que a sequência de Lichtenberg ocorre, sendo definida de maneira recursiva por $L_{i_n} + L_{i_{n-1}} = 2^n - 1$, $n \geq 1$. Decorrente disto e da descoberta de outras propriedades, podem ser verificadas inúmeras propriedades que correlacionam o conjunto dos números de Lichtenberg com o conjunto dos números de Jacobsthal.

No cotejo de interesse de pesquisa futura, cabe assinalar a existência de três categorias de Tabuleiros e que se denominam por: classe dos Tabuleiros abstratos; classe dos Tabuleiros concretos; classe dos Tabuleiros descritos pelo *software GeoGebra*. (Alves, 2024). Na figura 8 indica-se um esquema mnemônico auxiliar para os elementos envolvidos. De fato, tomando como referência à classe dos Tabuleiros abstratos, cuja interpretação pioneira ocorreu com Benjamin e Quinn (2003), verifica-se a existência de inúmeras recorrências recentemente introduzidas na literatura, desprovidas de interpretação via Tabuleiro e ladrilhos (Belbachir; Belkhir, 2013; Bodeen, *et al*, 2014; Göcen; Soykan, 2025; Graham; Patashnik; Knuth, 1994).

Figura 8: Classes de Tabuleiros para o caso de recorrências que admitem representação.



Fonte: Elaboração dos autores.

Na Tabela 2 quatro novos conjuntos dos números são descritos.

Tabela 2: Novas famílias de recorrências derivadas dos números de Lichtenberg $\{Li_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Termos iniciais ¹	Termo geral ou Fórmula de Binnet	Propriedades com a sequência de Jacobsthal e relações
$MLi_0 = 1, MLi_1 = 1, MLi_2 = 4$	$MLi_n = 2^n + \frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{2}$	$MLi_{2n} = J_{2n} + J_{2n+1}, \quad n \geq 0.$ $MLi_{2n+1} = J_{2n+1} + J_{2n+2} - 1, \quad n \geq 0.$
$NLi_0 = 2, NLi_1 = 1, NLi_2 = 6$	$NLi_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n + \frac{7}{6}(-1)^n - \frac{1}{2}$	$NLi_{2n} = 2J_{2n+1}, \quad n \geq 0.$ $NLi_{2n+1} = J_{2n+3} - 2, \quad n \geq 0.$
$PLi_0 = 2, PLi_1 = 1, PLi_2 = 6$	$PLi_n = 1 \cdot 2^n - \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}$	$NLi_{2n} = 3J_{2n}, \quad n \geq 0.$ $NLi_{2n+1} = 2(J_{2n} + J_{2n+1}), \quad n \geq 0.$
$QLi_0 = 1, QLi_1 = 5, QLi_2 = 8$	$QLi_n = \frac{7}{3} \cdot 2^n - \frac{5}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}$	$QLi_{2n} = 4(J_{2n-2} + J_{2n-1} + J_{2n}),$ $QLi_{2n+1} = J_{2n+1} + J_{2n+2} + J_{2n+3}.$

Fonte: Elaborado pelos autores.

¹ Sabe-se que, para cada conjunto de valores fixados, determina-se, de forma única, uma nova sequência numérica. Maiores detalhes, sugere-se consultar Vorobiev (2000).

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o apoio financeiro concedido pelo CNPq. O segundo autor agradece à FCT pelo apoio dos projetos UID/00013: Centro de Matemática da Universidade do Minho (CMAT/UM) e UID/00194: Centro de Pesquisa em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF/U Aveiro).

REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V. A fórmula de de Moivre, de Lammé ou de Binet. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 1–20, 2017.
- ALVES, F. R. V. Visualização de sequências recorrentes, algumas propriedades e a noção de tabuleiro 2d/3d. **Revista GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 13, p. 1–16, 2024.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. A sequência de Padovan ou coordonier. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, n. 45, p. 1–23, 2022.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C.; VIEIRA, R. P. Interpretação combinatória dos termos de algumas sequências recorrentes via tabuleiro e ladrilhamentos. **Revista do Professor de Matemática Online**, v. 13, n. 2, p. 274–294, 2025.
- BELBACHIR, H.; BELKHIR, A. Tiling approach to obtain identities for generalized fibonacci and lucas numbers. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 41, n. 2, p. 13–17, 2013.
- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. **Proofs that really count: The art of combinatorial proof**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2003.
- BODEEN, J. *et al.* Tiling a strip with triangles. **The Electronic Journal of Combinatorics**, v. 21, n. 1, p. 1–7, 2014.
- CATARINO, P. M.; BORGES, C. Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75–86, 2019.
- CERDA-MORALES, G. Lichtenberg hybrid quaternions. **Mathematica Moravica**, v. 29, n. 1, p. 31–41, 2025.
- CRAVEIRO, I. M. **Extensões e interpretações combinatórias para os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal**. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- GÖCEN, M.; SOYKAN, Y. On generalized avicenna numbers. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 48, n. 1, p. 13300–13316, 2025.
- GÖKBAS, H. A new family of number sequences: Leonardo-Alwyn numbers. **Armenian Journal of Mathematics**, v. 15, n. 6, 2023.
- GRAHAM, R.; PATASHNIK, O.; KNUTH, D. E. **Concrete mathematics: A foundation for computer science**. London: Addison-Wesley, 1994.
- GRIMALDI, R. **Fibonacci and Catalan numbers: An introduction**. London: Wiley, 2012.
- GULLBERG, J. **Mathematics: From the birth of numbers**. New York: W. W. Norton, 1997.
- HEEFFER, A.; HINZ, A. M. “a difficult case”. **Recreational Mathematics Magazine**, v. 4, n. 8, p. 6–23, 2017.
- HINZ, A. M. The lichtenberg sequence. **The Fibonacci Quarterly**, v. 55, n. 1, p. 2–12, 2017.
- HINZ, A. M.; KLAVZAR, S.; MILUTINOVIĆ, U.; PETR, C. **Tower of Hanoi**. Basel: Springer, 2013.
- HORADAM, A. F. A fibonacci sequence. **The American Mathematical Monthly**, v. 68, n. 5, p. 455–459, 1961.
- HORADAM, A. F. Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 3, n. 3, p. 161–176, 1965.
- HORADAM, A. F. Jacobsthal numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 34, n. 1, p. 41–54, 1996.
- KHADIR, O.; NÉMETH, L.; SZALAY, L. Tilings of dominoes with ranked colors. **Results in Mathematics**, v. 79, p. 253, 2024.
- KLEINER, I. **Excursions in the history of mathematics**. New York: Springer, 2012.
- KOSHY, T. **Pell and Pell Lucas numbers with applications**. New York: Springer, 2017.
- KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers**. New York: Springer, 2019. v. 2.
- NÉMETH, L. Tilings of $(2 \times 2 \times n)$ -board with coloured cubes and bricks. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 51, n. 5, p. 786–798, 2020.
- ROUGETET, L. **Le binaire au bout des doigts: Un casse-tête entre récréation mathématique et enseignement**. Paris: EDP Sciences et UGA Éditions, 2024.
- SOYKAN, Y. Generalized olivier numbers. **Asian Research Journal of Mathematics**, v. 19, n. 1, p. 1–22, 2023.
- SOYKAN, Y. Generalized pandita numbers. **International Journal of Mathematics, Statistics and Operations Research**, v. 3, n. 1, p. 107–123, 2023.

SOYKAN, Y. Pierre numbers. **Journal of Progressive Research in Mathematics**, v. 20, n. 1, p. 16–38, 2023.

SOYKAN, Y. Richard numbers. **International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 10, n. 3, p. 38–51, 2023.

SPREAFICO, E. V. P. **Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos**. 132 p. Tese (Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

STAKOV, A. **The mathematics of harmony**: From Euclid to contemporary mathematics and computer science. London: World Scientific Press, 2009.

STOCKMEYER, P. K. A sequence a000975. **The Fibonacci Quarterly**, v. 55, n. 5, p. 174–185, 2017.

TEDFORD, S. J. Combinatorial identities for the padovan numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 57, n. 4, p. 291–298, 2019.

VOROBIEV, N. **Fibonacci numbers**. Washington: Birkhäuser Verlag, 2000.