INTER-RELAÇÕES ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES DE BERNOULLI, BINOMIAL E POISSON NO COTIDIANO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE

[1]Fernanda Paula, [1]Domingos Santos

[1]Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT)
<fernanda.paula@ufnt.edu.br> <domingos.santos@ufnt.edu.br>
DOI: 10.21439/conexoes.v20.4095

Resumo. As distribuições probabilísticas desempenham um papel fundamental na modelagem e análise dos resultados de experimentos aleatórios, sendo aplicadas em diversas áreas do conhecimento. Entre as distribuições para variáveis discretas, destacam-se a Bernoulli, a Binomial e a Poisson. Este trabalho tem como objetivo apresentar as características dessas distribuições, com base em uma pesquisa bibliográfica que engloba conceitos fundamentais e propriedades matemáticas. Além disso, enfatizam-se as inter-relações matemáticas entre essas distribuições, como a transformação da Bernoulli para a Binomial e a aproximação da Binomial para a Poisson, ilustradas com exemplos práticos do cotidiano, como a cobrança de pênaltis em uma partida de futebol e o envio de mensagens em grupos de *WhatsApp*, que contribuem para o ensino e a aprendizagem de probabilidade. Ao final, o leitor compreenderá a relevância teórica, histórica e prática dessas distribuições, bem como a importância de suas inter-relações para a resolução estratégica de problemas, por meio de aproximações e transformações que facilitam cálculos e análises.

Palavras-chave: bernoulli; binomial; ensino e aprendizagem de probabilidade; inter-relações entre as distribuições probabilísticas; poisson.

INTERRELATIONSHIPS BETWEEN BERNOULLI, BINOMIAL, AND POISSON DISTRIBUTIONS IN EVERYDAY LIFE: CONTRIBUTIONS TO THE TEACHING AND LEARNING OF PROBABILITY

Abstract. Probability distributions play a fundamental role in modeling and analyzing the results of random experiments, being applied in various fields of knowledge. Among the distributions for discrete variables, Bernoulli, Binomial, and Poisson stand out. This study aims to present the characteristics of these distributions based on a literature review encompassing fundamental concepts and mathematical properties. Furthermore, the mathematical interrelationships among these distributions are emphasized, such as the transformation from Bernoulli to Binomial and the approximation from Binomial to Poisson, illustrated with practical examples from everyday life, such as penalty kicks in a soccer match and the sending of messages in WhatsApp groups, which contribute to the teaching and learning of probability. Ultimately, the reader will understand the theoretical, historical, and practical relevance of these distributions, as well as the importance of their interrelationships for the strategic resolution of problems through approximations and transformations that facilitate calculations and analyses.

Keywords: bernoulli; binomial; teaching and learning of probability; interrelationships among probability distributions; poisson.

1 INTRODUÇÃO

A probabilidade, antes de ser formalizada, já se manifestava em práticas culturais e cotidianas, sobretudo nos jogos de azar. Na pré-história, entre os artefatos utilizados, destacava-se o astrágalo, considerado o randomizador mais comum da Antiguidade e precursor do dado moderno, conforme Hacking (2006). Tratava-se do osso do calcanhar de animais, cujas faces irregulares influenciavam os resultados obtidos. Além de servir para jogos de sorte, também era empregado em rituais e práticas divinatórias, orientando decisões importantes nas sociedades antigas.

Após sua formalização, a probabilidade tornou-se relevante em diversas áreas do conhecimento e sua importância permanece até os dias atuais. Conforme evidenciado por Santos e Nava (2021, p. 216), "A probabilidade passou a ser de grande importância por possuir aplicações em diversas áreas científicas e estar muito presente em situações do nosso cotidiano". Nesse contexto, são comuns conceitos probabilísticos na resolução de problemas, como os de experimento aleatório, espaço amostral, variável aleatória e distribuições probabilísticas.

As distribuições probabilísticas desempenham um papel essencial na probabilidade, fornecendo uma estrutura fundamental para modelar variáveis aleatórias. Dentro desse quadro, a utilização de aproximações e transformações entre essas distribuições pode ser uma estratégia eficiente para simplificar a resolução de problemas.

No entanto, os livros-texto de probabilidade frequentemente apresentam exemplos hipotéticos distantes do cotidiano, o que dificulta o entendimento das distribuições e, consequentemente, a percepção clara de suas inter-relações em aplicações práticas.

Diante disso, a questão que orienta este estudo é: como as inter-relações entre as distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson podem ser compreendidas e aplicadas por meio de demonstrações matemáticas e exemplos práticos do cotidiano, para facilitar a resolução de problemas probabilísticos?

Considerando que o enfoque prático dessas aproximações e transformações é pouco explorado em livros-texto de probabilidade, este trabalho tem como objetivo apresentar, demonstrar matematicamente e exemplificar, por meio de aplicações cotidianas, algumas inter-relações entre as distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson. Assim, o estudo contribui para o ensino e a aprendizagem da probabilidade, utilizando exemplos como cobranças de pênaltis em partidas de futebol e mensagens em grupos de *WhatsApp*, facilitando a compreensão dos conceitos e suas inter-relações por meio de situações cotidianas, relevantes e atuais.

Para atingir esse objetivo, foi realizada uma pesquisa bibliográfica para identificar e entender algumas das inúmeras inter-relações existentes entre as distribuições de probabilidade e suas aplicações práticas. Segundo Gil (1994), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

Inicialmente, apresentam-se aspectos históricos, conceitos fundamentais, características numéricas e exemplos de aplicação das distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson, que antecedem a exposição das inter-relações abordadas neste trabalho: a transformação da Bernoulli para a Binomial e a aproximação da Binomial pela Poisson. Para cada inter-relação, é incluída uma aplicação prática que evidencia seu potencial estratégico na resolução de problemas do cotidiano.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, as distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson são apresentadas, com ênfase em seus conceitos fundamentais, no efeito dos parâmetros sobre o comportamento gráfico e em exemplos ilustrativos, de modo a favorecer a compreensão de suas inter-relações.

Para sua elaboração, as obras de Bussab e Morettin (2017), Casella e Berger (2010), Devore (2016) e Meyer (1977) foram consultadas, referências clássicas amplamente utilizadas em disciplinas de Probabilidade e Estatística nos cursos de graduação no Brasil. Essas obras se destacam pela consistência teórica e pela variedade e clareza dos exemplos apresentados.

A escolha dessas fontes fundamenta o propósito deste trabalho: apresentar, demonstrar e exemplificar, por meio de situações do cotidiano, algumas das inter-relações entre as distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson. Elas proporcionam uma compreensão aprofundada, permitindo explorar aplicações práticas e estimular a criatividade na elaboração de exemplos contextualizados no cotidiano, que serão apresentados ao longo deste artigo para ilustrar essas inter-relações.

2.1 Um pouco de história

De acordo com Conti e Boâs (2019), em 1713 foi publicado postumamente o primeiro livro totalmente dedicado à teoria das probabilidades, de autoria de Jacob Bernoulli (1654-1705), o "*Ars Conjectandi*" ou "A Arte de Conjecturar". Foi nessa obra que Bernoulli começou a explorar a aplicação da probabilidade em contextos que vão além dos jogos de azar. Entre suas contribuições, Bernoulli propôs a distribuição probabilística de Bernoulli, que descreve os resultados de um experimento aleatório em que cada tentativa possui apenas duas opções possíveis: sucesso e insucesso, como ocorre no lançamento de uma moeda, em que os resultados são cara ou coroa.

Essa distribuição serviu como base essencial para o desenvolvimento de uma das distribuições mais importantes da teoria das probabilidades, a distribuição Binomial. Segundo Gregersen (2010, p. 293-294), nesta obra publicada em 1713, Bernoulli demonstrou que a probabilidade de ocorrer k eventos de interesse em n tentativas repetidas é representada pelo k-ésimo termo (começando a contar do 0) na expansão da expressão binomial $(p+q)^n$, em que $q = 1 - p$. Por exemplo, ao lançar um dado de seis faces, a probabilidade de qualquer número específico sair em cada lançamento é de 1 em 6. Portanto, a probabilidade de obter 10 seis em 50 lançamentos é representada pelo 10º termo na expansão de $\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^{50}$, resultando em aproximadamente 0,115586.

Tendo vivido em anos posteriores a Bernoulli, Simeon Denis Poisson (1781-1840) foi um matemático francês que fez consideráveis contribuições à matemática à física. Segundo Stigler (1982), Poisson talvez seja mais amplamente reconhecido hoje por causa da distribuição de probabilidade discreta que leva seu nome, a distribuição de Poisson. Curiosamente, no entanto, a distribuição de Poisson aparece apenas uma vez nas obras de Poisson, especificamente em uma única página do seu livro de 1837, chamado *Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matière Criminelle et en Matière Civile, Précédées des Règles Générales du Calcul des Probabilités* ou "Investigações sobre a Probabilidade dos Julgamentos em Matéria Criminal e em Matéria Civil, Precedidas das Regras Gerais do Cálculo das Probabilidades". No livro, Poisson introduz a distribuição como um caso limite da distribuição Binomial.

O autor ainda diz que, apesar dessa breve menção, a distribuição de Poisson se tornou uma das distribuições mais amplamente usadas na teoria da probabilidade e estatística. Porém, não há indicação de que Poisson tenha previsto a vasta aplicabilidade e relevância de sua distribuição, não tendo feito qualquer comentário especial sobre ela. Pode-se dizer, portanto, que embora Poisson tenha descoberto a expressão matemática, ele não descobriu a distribuição de probabilidade.

Conforme Katti e Rao (1968), foi Bortkiewicz (1868-1931) quem primeiro reconheceu uma conexão existente entre a fórmula de Poisson e certos tipos de dados discretos, trabalhando em detalhes muitas das consequências teóricas e práticas de sua descoberta. Ladislaus von Bortkiewicz nasceu em São Petersburgo, de ascendência polonesa. Em um de seus estudos, no final do século XIX, Bortkiewicz utilizou o modelo de Poisson na descrição do número de mortos por coice de cavalo, por ano, nos regimentos de cavalaria da Prússia, contribuindo para a consolidação e a divulgação desse modelo. Os autores ainda afirmam que a distribuição de Poisson é a segunda em importância, depois da Normal, seja do ponto de vista teórico ou por sua amplitude de aplicação.

2.2 Conceitos fundamentais

As distribuições de probabilidade fundamentam-se em conceitos matemáticos sólidos. Nesta seção, apresentamos os princípios básicos das variáveis aleatórias discretas, com foco na função de probabilidade, esperança matemática e variância. Esses conceitos formalizam o comportamento de fenômenos aleatórios, preparando o leitor para a abordagem das distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson. Cada conceito será definido com rigor e ilustrado por meio de exemplos simples, como lançamentos de dados, para garantir clareza na exposição da teoria e de sua aplicação.

Definição 1 (Variável aleatória)**.** *A variável aleatória (v.a.) é uma função que atribui um valor real único para cada resultado de um experimento aleatório.*

Seja X uma v.a. Se o número de valores de X for finito ou infinito enumerável, então X será uma variável aleatória discreta (v.a.d.). As variáveis aleatórias podem ser classificadas em discretas ou contínuas, conforme a natureza numérica dos valores que assumem. Em geral, uma v.a.d. é obtida mediante alguma forma de contagem. Alguns exemplos são o número de vitórias obtidas por um atleta e o número de terremotos ocorridos em uma região.

Definição 2 (Função de Probabilidade)**.** *Chama-se função de probabilidade (f.p.) da v.a.d. X, a função $P(X = x_i) = P(x_i) = P_i$, que associa a cada valor de x_i sua probabilidade de ocorrência. A função $P(x_i)$ será uma f.p. se satisfizer as seguintes condições:*

i) $P(x_i) \geq 0$*, para todo* x_i*;*

ii) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$ *(no caso finito) ou* $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$ *(no caso infinito enumerável).*

No lançamento de um dado honesto, definimos a variável aleatória X como o valor da face observada. Nesse caso, cada face tem a mesma probabilidade de ocorrência, que é $\frac{1}{6}$. A f.p. pode então ser representada por

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, \text{ para } x = 1, \ldots, 6, \\ 0, \text{ para outros valores de } x \end{cases} .$$

Nesse exemplo, outra maneira de representar a f.p. é por meio de uma tabela, ou seja,

Tabela 1: Função de probabilidade do lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Definição 3 (Esperança matemática)**.** *Seja X uma v.a.d. assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$. O valor esperado, ou esperança de X, denotado por $\mathbb{E}(X)$, é dado por:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p(x_i),$$

desde que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p(x_i)$ *convirja absolutamente para um valor real.*

No caso em que X assume uma quantidade finita n de valores, o limite superior do somatório que define $\mathbb{E}(X)$ será n. A esperança de uma v.a. X é o valor que se espera obter, em média, para X na repetição do experimento aleatório.

Definição 4 (Variância)**.** *Seja X uma variável aleatória. A variância de X, denotada por $Var(X)$, é dada por*

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 .$$

Se X é uma v.a.d.,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i),$$

desde que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i)$ *convirja absolutamente para um valor real.*

A variância de uma variável aleatória X é uma medida da dispersão dos valores de X em torno de sua esperança matemática $\mathbb{E}(X)$. A raiz quadrada de $Var(X)$ também é uma medida de dispersão, denominada desvio padrão da v.a. X.

2.3 Distribuições probabilísticas

Na literatura, existem inúmeras distribuições probabilísticas que modelam variáveis aleatórias discretas ou contínuas. A seguir, serão apresentadas e discutidas as distribuições discretas relevantes para o desenvolvimento deste trabalho: Bernoulli, Binomial e Poisson.

2.3.1 Distribuição Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é um modelo probabilístico fundamental para representar experimentos aleatórios com apenas duas categorias distintas de resultados, geralmente denominadas sucesso e fracasso. Assim, a distribuição de Bernoulli fornece uma estrutura essencial para a análise de dados binários.

Definição 5. *A variável aleatória X tem distribuição de Bernoulli se sua função de probabilidade é dada por*

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}, \quad \text{sendo } k = 0 \text{ ou } k = 1, \tag{1}$$

em que p é a probabilidade de sucesso.

Nessas condições, diz-se que X segue uma distribuição Bernoulli com parâmetro p, e a notação $X \sim Ber(p)$ pode ser utilizada. A esperança matemática de X, nesse caso, é dada por

$$\mathbb{E}(X) = p,$$

e sua variância é

$$Var(X) = p(1 - p).$$

Exemplo 1. *Suponha que a probabilidade de óbito de um paciente, ao dar entrada na terapia intensiva, seja de 25%. Seja X uma variável binária indicadora de óbito desse paciente. Obtenha a distribuição de probabilidade de X.*

Para obter a distribuição de X, considere que se trata de uma variável aleatória binária que assume os valores 0 (sobrevivência) e 1 (óbito), sendo este interpretado como sucesso, por ser o fator de interesse. Assim, $X \sim Ber(0,25)$, cuja f.p. é

$$P(X = k) = 0,25^k \cdot (0,75)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

Dessa forma, obtemos $P(X = 0) = 0,75$ e $P(X = 1) = 0,25$, conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Função de probabilidade da variável indicadora de óbito.

x	0	1
$P(X = x)$	$0,75$	$0,25$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Além disso, a esperança e a variância de X são dadas por

$$\mathbb{E}(X) = 0,25 \quad \text{e} \quad Var(X) = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875.$$

2.3.2 Distribuição Binomial

A partir da distribuição de Bernoulli, é possível construir outros modelos probabilísticos mais robustos, como a distribuição Binomial. A distribuição Binomial é adequada para modelar o número de sucessos em uma sequência de n ensaios de Bernoulli independentes, cada um com uma probabilidade fixa de sucesso p. Temos, por resultado, uma sucessão de sucessos e fracassos. Esse modelo fundamenta-se nas seguintes hipóteses:

- ocorrência de n ensaios sucessivos e independentes;
- cada ensaio admite apenas dois resultados: sucesso ou fracasso; e
- a probabilidade de sucesso em cada ensaio é p, e a de fracasso é $1 - p$.

Definição 6. *Considere n repetições independentes de um experimento aleatório em que a probabilidade de sucesso em cada repetição é p. Então, a variável aleatória X, que representa o número de sucessos k nas n repetições, segue uma distribuição Binomial com parâmetros n e p. A f.p. de X é dada por*

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

em que $\binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial, dado por $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Aqui, n é um número natural, $0<p<1$ e $k\leq n$.

Nessas condições, diz-se que X segue uma distribuição Binomial com parâmetros n e p, e a notação $X \sim Bin(n,p)$ pode ser utilizada. A esperança matemática de X, nesse caso, é dada por

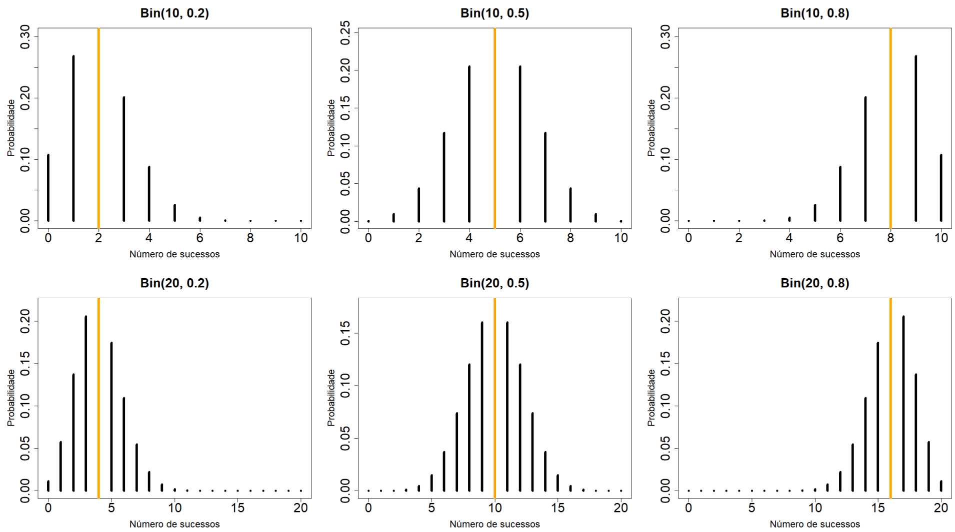
$$\mathbb{E}(X)=np,$$

e sua variância é

$$Var(X)=np(1-p).$$

A Figura 1 ilustra distribuições binomiais para diferentes valores de n e p. A sequência de gráficos permite a comparação visual dos efeitos das variações nesses parâmetros. As linhas amarelas indicam as médias np de cada distribuição, de modo que, em todos os casos, observa-se que as variáveis se concentram em torno dessas médias.

Figura 1: Representações da distribuição Binomial.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na parte superior, as três distribuições binomiais assumem $n=10$ com diferentes valores de p, e na parte inferior, observa-se o mesmo para $n=20$. É possível visualizar que, para n fixo, quanto menor o valor de p, maior é a assimetria à direita da distribuição e, quanto maior o valor de p, a distribuição é mais assimétrica à esquerda. A distribuição é simétrica para $p=0,5$, quando se apresenta centrada em $\frac{n}{2}$, e, para p menor ou maior que $0,5$, as distribuições são assimétricas à direita ou à esquerda, respectivamente.

O que se observa na mudança de $n=10$ (parte superior) para $n=20$ (parte inferior), mantendo os mesmos valores de p é a variabilidade das distribuições. Quanto maior o valor n, menor é a dispersão relativa em torno da média.

Exemplo 2. *Um atirador tem uma precisão de acerto de 80%. Qual é a probabilidade de acertar exatamente dois tiros em um total de cinco tiros?*

A variável aleatória X, que representa o número de acertos, segue uma distribuição Binomial com parâmetros $n = 5$ (número total de tiros) e $p = 0,8$ (probabilidade de sucesso em cada tiro), isto é,

$$P(X = k) = \binom{5}{k}(0,8)^k(0,2)^{5-k}, \quad k = 0,1,2,3,4,5.$$

Como queremos a probabilidade de $X = 2$, tem-se

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^3.$$

Efetuando os cálculos:

$$P(X = 2) = 10 \cdot 0,64 \cdot 0,008 = 0,0512.$$

Portanto, a probabilidade de o atirador acertar exatamente dois tiros em cinco tentativas é $0,0512$, ou seja, $5,12\%$.

2.3.3 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson está intimamente ligada a experimentos em que um evento ocorre dentro de um intervalo de tempo, área, volume, entre outros, desempenhando um papel crucial como modelo probabilístico adequado para diversos fenômenos observáveis.

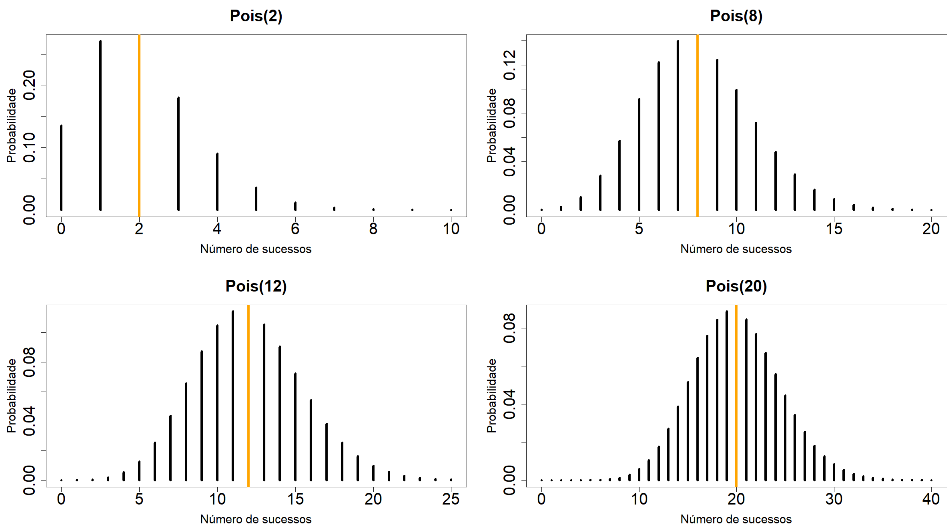
Definição 7. *Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro ν $(\nu > 0)$ se a função de probabilidade de X é dada por*

$$P(X = x) = \frac{e^{-\nu}\nu^x}{x!}, \quad \text{com } x \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Se X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro ν, isto é, $X \sim \text{Pois}(\nu)$, então

$$\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \nu.$$

Figura 2: Representações da distribuição Poisson.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 2 apresenta gráficos da distribuição Poisson para diferentes valores de ν, de modo que as linhas amarelas representam as médias de cada distribuição. Observa-se que, à medida que o valor de ν aumenta, a distribuição se torna mais simétrica e sua variância aumenta. Quando ν é pequeno, a distribuição é altamente assimétrica à direita e concentrada em torno da média de X.

Exemplo 3. *Considere a gravação de dados em um disco rígido e o envio deste para um certificador verificar o número de pulsos ausentes. Suponha que o número de pulsos ausentes ocorra, em média, a razão de 1 pulso a cada 5 discos. Qual é a probabilidade de o disco apresentar exatamente um pulso ausente?*

Considere que X pode ser modelada por uma distribuição de Poisson. Aqui, podemos utilizar a Fórmula 3, com $\nu = 0,2$, já que esse é o número esperado de pulsos ausentes por disco. Nesse caso, queremos encontrar $P(X = 1)$. Logo,

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0,2} \cdot 0,2^1}{1!} \approx 0,1637.$$

Portanto, a probabilidade de um disco ter exatamente um pulso ausente é, aproximadamente, $0,1637$.

3 DEMONSTRAÇÃO E APLICAÇÃO DAS INTER-RELAÇÕES ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES

Nesta seção, serão exploradas as inter-relações entre as distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson, demonstrando como uma pode ser derivada de outra por meio de teoremas e propriedades fundamentais. Inicialmente, abordaremos a transição da distribuição Bernoulli para a Binomial. Em seguida, investigaremos a relação entre as distribuições Binomial e Poisson, evidenciando que a distribuição Poisson pode ser obtida como um caso limite da Binomial quando o número de ensaios é grande e a probabilidade de sucesso é pequena.

Além disso, as inter-relações apresentadas serão ilustradas por meio de exemplos do cotidiano, mostrando a sua aplicabilidade em situações práticas. A inter-relação entre as distribuições de Bernoulli e Binomial será exemplificada pela cobrança de pênaltis em uma partida de futebol, enquanto a inter-relação entre as distribuições Binomial e Poisson será ilustrada pelo envio de mensagens em grupos de *WhatsApp*. A elaboração desta subseção apoia-se nas obras de Bussab e Morettin (2017), Casella e Berger (2010), Devore (2016) e Meyer (1977).

3.1 Bernoulli e Binomial

A distribuição Binomial pode ser encontrada quando repetimos os ensaios de Bernoulli n vezes. Para demonstrar esta inter-relação, consideremos uma única ocorrência de um experimento aleatório, em que podem ocorrer dois resultados: sucesso ou fracasso. Sejam p a probabilidade de sucesso, $1 - p$ a probabilidade de fracasso e X_1, a variável aleatória que representa o número de sucessos na execução do experimento. Se definirmos $X_1 = 0$ para fracasso e $X_1 = 1$ para sucesso, tem-se:

$$P(X_1 = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X_1 = 0) = 1 - p.$$

Suponha que esse experimento seja repetido n vezes, sucessiva e independentemente, e que o interesse esteja em encontrar a probabilidade de obter exatamente k sucessos nesses n experimentos de Bernoulli. A probabilidade de uma sequência específica de k sucessos e, consequentemente, $n - k$ fracassos é dada por $p^k(1 - p)^{n-k}$. O número de maneiras de obter k sucessos em n experimentos pode ser obtido por meio da combinação é dado pelo coeficiente binomial $\binom{n}{k}$. Portanto, a probabilidade de obter exatamente k sucessos em n experimentos é

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Dessa forma, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes de Bernoulli com parâmetro p, a soma $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ segue uma distribuição Binomial com parâmetros n e p, ou seja, $X \sim Bin(n, p)$.

3.2 Aplicação prática: cobranças de pênaltis

Suponha que um jogador de futebol tenha aproveitamento histórico de 70% nas cobranças de pênalti, ou seja, $P(\text{sucesso}) = P(\text{o jogador marcar um gol}) = 0,70$. Considerando que esse jogador vá cobrar 3 pênaltis, qual é a probabilidade de ele marcar exatamente dois gols?

Vamos representar o gol por S (sucesso) e a ausência de gol por F (fracasso). O evento A: marcar exatamente dois gols pode ocorrer nas seguintes sequências:

$$A = \{SSF, SFS, FSS\},$$

ou, utilizando a notação $X = 1$ para sucesso e $X = 0$ para fracasso, como na distribuição de Bernoulli, tem-se

$$A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

É claro que $P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$ e, devido à independência das cobranças,

$$P(SSF) = 0,70 \times 0,70 \times 0,30 = 0,147.$$

O mesmo valor é obtido para $P(SFS)$ e $P(FSS)$. Somando os três valores, obtém-se:

$$P(A) = 0,147 + 0,147 + 0,147 = 0,441.$$

Portanto, conforme as condições estabelecidas no exemplo, a probabilidade de o jogador converter exatamente dois gols nas três cobranças de pênaltis é $44,1\%$.

Entretanto, esse raciocínio, que exige listar todas as sequências possíveis de acertos e erros nas cobranças de pênalti e calcular suas probabilidades, como ocorre na distribuição de Bernoulli, torna-se cada vez mais trabalhoso à medida que o número de cobranças aumenta.

Nessas situações, é importante destacar que o interesse recai apenas sobre o número total de gols convertidos, e não na ordem em que eles ocorrem.

Essa característica permite a utilização direta da distribuição Binomial, que é adequada para modelar o número de sucessos (gols) em um conjunto de n tentativas independentes, todas com a mesma probabilidade de sucesso p. Assim, é possível calcular de maneira rápida e prática a probabilidade de marcar uma certa quantidade de gols, sem a necessidade de listar e somar as probabilidades de todas as sequências possíveis.

Vamos designar por Y o número total de gols em 3 cobranças, com probabilidade de sucesso $p = 0{,}70$. Os possíveis valores de Y são 0, 1, 2 e 3. Assim, podemos modelar Y por uma distribuição Binomial, ou seja, $Y \sim \textit{Bin}(3, 0{,}70)$. Usando a Fórmula 2, temos:

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= \binom{3}{2} . (0,70)^2 . (1 - 0,70)^{3-2} \\ &= 3 \times 0,49 \times 0,30 \\ &= 0,441. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de o jogador converter exatamente dois dos três pênaltis é $0,441$.

3.3 Binomial e Poisson

A distribuição de Poisson pode ser obtida a partir da distribuição Binomial. Especificamente, as probabilidades binomiais $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, sob a condição de que $n \to \infty$, $p \to 0$ e $np = \nu$, sendo $np = \nu$ uma constante não nula, aproximam-se das probabilidades da distribuição de Poisson. A seguir, essa aproximação será demonstrada em detalhes.

Primeiramente, note que se $X \sim Bin(n, p)$, tem-se:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando $np = \nu$, então $p = \frac{\nu}{n}$. Substituindo p na Fórmula 4 em termos de ν, obtém-se:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\nu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\nu^k}{k!} \left[(1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\nu^k}{k!} \left[(1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Para garantir que ν permaneça constante na relação $np = \nu$ à medida que $n \to \infty$ e $p \to 0$, é necessário que p diminua proporcionalmente ao aumento de n. Nessa perspectiva, se $n \to \infty$, $p \to 0$ e $np = \nu$, temos a condição necessária para a aproximação. Os termos da forma $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, ..., convergem para 1 quando $n \to \infty$, assim como a expressão $\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k}$.

Observa-se que, para $n \to \infty$, vale:

$$\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n \to e^{-\nu}.$$

Para compreender esse limite, é necessário recordar um resultado fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, que, segundo Guidorizzi (2018, p. 268), é expresso da seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Aplicando-o ao caso $x = -\nu$, nota-se que:

$$\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-\nu}{n}\right)^n,$$

o que conduz a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n = e^{-\nu}.$$

Dessa forma, obtém-se a distribuição de Poisson, ou seja,

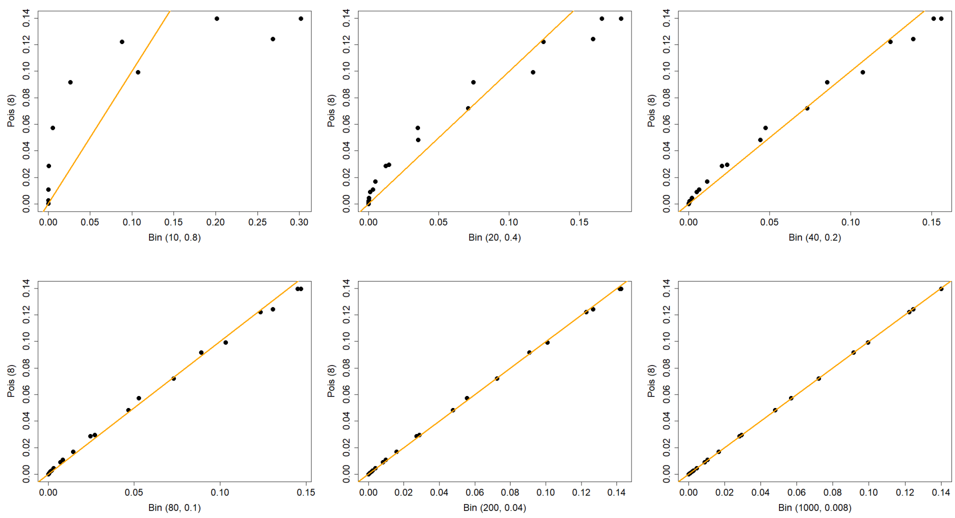
$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{e^{-\nu}\nu^k}{k!}, \text{ com } k \in \mathbb{N}.$$

O resultado acima mostra que podemos aproximar as probabilidades da distribuição Binomial utilizando as probabilidades da distribuição de Poisson, desde que certas condições sejam satisfeitas. Em termos matemáticos, essa aproximação é válida quando o número de ensaios n é grande e a probabilidade de sucesso p é pequena, de tal forma que o produto np (que representa o valor esperado na distribuição Binomial) é uma constante finita.

Porém, não há uma definição universal do quão grande deve ser n e o quão pequeno deve ser p. Cabe ao pesquisador decidir, com base em sua experiência ou em referências que discutem a aproximação da distribuição Binomial pela de Poisson. Devore (2016), por exemplo, sugere como regra prática que a aproximação pode ser usada quando $n > 50$ e $np < 5$, enquanto Triola (2010) propõe $n \geq 100$ e $np \leq 10$.

Para auxiliar o leitor na visualização do comportamento da aproximação, a Figura 3 apresenta gráficos em que ν foi fixado em 8, variando-se os valores de n e p de forma que $np = \nu$. A linha amarela indica os pontos em que os valores dos eixos horizontal e vertical coincidem. Para $n = 10$ e $p = 0,8$, por exemplo, as probabilidades obtidas pelas distribuições Binomial e Poisson diferem consideravelmente, fazendo com que os pontos pretos se afastem da linha amarela. Por outro lado, para $n = 1000$ e $p = 0,008$, os pontos praticamente coincidem com a linha amarela, evidenciando a proximidade entre as probabilidades fornecidas pelas duas distribuições.

Figura 3: Representação da aproximação da distribuição Binomial pela Poisson para $\nu = 8$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

3.4 Aplicação prática: mensagens em grupos de *WhatsApp*

Para ilustrar a relação entre as distribuições Binomial e Poisson, considere um grupo de *WhatsApp* com 1000 participantes. Queremos calcular a probabilidade de que, em um intervalo de um minuto, exatamente 8 pessoas distintas enviem ao menos uma mensagem cada.

Suponha que, em média, cada participante envie uma mensagem a cada 100 minutos. Assim, a probabilidade de que um participante específico envie pelo menos uma mensagem em um dado minuto é

$$p = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Nesse caso, temos um número grande de tentativas ($n = 1000$ participantes) e uma probabilidade pequena de sucesso ($p = 0,01$).

Para garantir a independência necessária ao modelo Binomial, consideramos que o envio de mensagens por pessoas distintas é praticamente independente. De fato, mensagens sequenciais de uma mesma pessoa tendem a ser dependentes, pois uma mensagem pode estimular ou inibir a próxima. Contudo, em um grupo grande e em intervalo curto, a decisão de cada participante de enviar ou não uma mensagem pode ser aproximada como independente das decisões dos demais. Essa é uma suposição razoável e comum em modelagens estatísticas para simplificar o problema.

Seja X a variável aleatória que representa o número de participantes que enviam ao menos uma mensagem em um minuto. Então, $X \sim Bin(1000, 0, 01)$, e a probabilidade de exatamente k participantes enviarem mensagem é dada por

$$P(X = k) = \binom{1000}{k}(0,01)^k(0,99)^{1000-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 1000.$$

O cálculo de $P(X = 8)$ pela fórmula da Binomial envolve números muito grandes e operações de potência e fatorial que, embora possíveis, tornam o processo trabalhoso e suscetível a erros se realizado manualmente. Para calcular o coeficiente binomial $\binom{1000}{8}$, é necessário manipular fatoriais de números muito grandes, como 1000!, 8! e 992!, praticamente inviável sem auxílio computacional. Além disso, as potências $(0, 01)^8$ e $(0, 99)^{992}$ exigem cálculos precisos com números muito pequenos e próximos de zero, o que aumenta a complexidade e o risco de erros. Por outro lado, a distribuição de Poisson simplifica consideravelmente esses cálculos. Embora o cálculo de e^{-10} não seja trivial manualmente, ele pode ser aproximado com tabelas de logaritmos ou outras técnicas, e os demais valores, como 10^8 e o fatorial $8! = 40320$, são relativamente simples de calcular ou memorizar, tornando o processo muito mais acessível.

Mesmo o uso de calculadoras científicas pode ser problemático para o cálculo direto da Binomial, devido à manipulação de números muito grandes e à instabilidade nas potências elevadas com bases decimais. Já o cálculo na Poisson envolve um número menor de operações com valores moderados, o que o torna mais rápido, estável e confiável em praticamente qualquer calculadora.

No âmbito computacional, *softwares* e linguagens de programação conseguem calcular a Binomial com precisão, porém, o custo computacional é maior, especialmente quando se deseja calcular probabilidades para vários valores de k. A aproximação pela distribuição de Poisson reduz esse custo significativamente, pois sua fórmula é mais simples e envolve apenas uma exponencial, uma potência e um fatorial, facilitando simulações e cálculos mais rápidos.

Assim, a distribuição de Poisson é especialmente vantajosa quando o número de tentativas n é grande, a probabilidade de sucesso p é pequena, e o produto $\nu = np$ não é elevado, como neste exemplo em que $\nu = 1000 \times 0,01 = 10$. Essa aproximação evita o uso de coeficientes binomiais gigantescos, facilitando o cálculo manual, o uso de calculadoras e o processamento computacional, sem sacrificar significativamente a precisão.

Pela distribuição de Poisson, temos:

$$P(X = k) \approx \frac{e^{-\nu}\nu^k}{k!} = \frac{e^{-10}10^k}{k!}.$$

Essa abordagem viabiliza o cálculo de forma muito mais direta, especialmente em situações em que se deseja encontrar várias probabilidades para diferentes valores de k.

Comparando os valores exatos (Binomial) e aproximados (Poisson) para $k = 0, 1, \ldots, 15$, obtemos a Tabela 3. Na tabela, denotamos por $P_{\text{Binomial}}(X = k)$ a probabilidade calculada pela distribuição Binomial com parâmetros $n = 1000$ e $p = 0,01$, e por $P_{\text{Poisson}}(X = k)$ a probabilidade aproximada pela distribuição de Poisson com parâmetro $\nu = np = 10$.

Tabela 3: Comparação entre as distribuições Binomial e Poisson para $n = 1000$, $p = 0,01$ e $\nu = 10$.

k	P_{Binomial}	P_{Poisson}	Diferença Absoluta	Erro Relativo (%)
0	4,3171e-5	4,5400e-5	2,2287e-6	5,16
1	4,3607e-4	4,5400e-4	1,7926e-5	4,11
2	2,2002e-3	2,2700e-3	6,9809e-5	3,17
3	7,3932e-3	7,5667e-3	1,7343e-4	2,34
4	1,8614e-2	1,8917e-2	3,0289e-4	1,63
5	3,7453e-2	3,7833e-2	3,8016e-4	1,02
6	6,2737e-2	6,3055e-2	3,1834e-4	0,51
7	8,9987e-2	9,0079e-2	9,2657e-5	0,10
8	1,1282e-1	1,1260e-1	2,2504e-4	0,20
9	1,2561e-1	1,2511e-1	5,0329e-4	0,40
10	1,2574e-1	1,2511e-1	6,3018e-4	0,50
11	1,1431e-1	1,1374e-1	5,7289e-4	0,50
12	9,5162e-2	9,4780e-2	3,8119e-4	0,40
13	7,3053e-2	7,2908e-2	1,4534e-4	0,20
14	5,2023e-2	5,2077e-2	5,4311e-5	0,10
15	3,4542e-2	3,4718e-2	1,7634e-4	0,50

Fonte: Elaborada pelos autores.

Além das probabilidades, apresentamos duas medidas de discrepância entre os modelos: a diferença absoluta, indicada por $D(k)$, e o erro relativo, indicado por $E(k)$. Ambas as medidas são dadas por:

$$D(k) = \left|P_{\text{Binomial}}(X = k) - P_{\text{Poisson}}(X = k)\right|$$

$$E(k) = \frac{D(k)}{P_{\text{Binomial}}(X = k)} \times 100\%.$$

Pode-se observar, a partir da Tabela 3, que as diferenças entre os valores são pouco expressivas. O erro relativo mantém-se abaixo de 1% na maior parte dos casos, o que significa que a probabilidade calculada pela aproximação de Poisson difere em menos de uma unidade percentual da probabilidade exata fornecida pela Binomial. Em termos práticos, trata-se de uma variação desprezível para aplicações estatísticas usuais, reforçando que, em contextos com grande número de tentativas e baixa probabilidade de sucesso, a distribuição de Poisson pode fornecer uma aproximação altamente eficiente da Binomial.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As distribuições Bernoulli, Binomial e Poisson são fundamentais na modelagem de fenômenos aleatórios envolvendo variáveis discretas. Neste trabalho, foram explorados aspectos matemáticos dessas distribuições, incluindo suas propriedades e o comportamento gráfico em função da variação dos parâmetros. Apresentou-se também um breve panorama histórico, ressaltando que, durante o desenvolvimento deste estudo, não foi encontrado nenhum trabalho ou obra em português que reunisse todos os detalhes históricos aqui apresentados.

Para a elaboração desse panorama, foram utilizadas diversas fontes internacionais, como Gregersen (2010) e Katti e Rao (1968), o que representa uma das contribuições relevantes deste trabalho, com o objetivo de ampliar a compreensão das distribuições e suas inter-relações.

A compreensão das inter-relações entre distribuições de probabilidade é fundamental para a seleção de modelos adequados e a obtenção de resultados precisos e confiáveis. Esse entendimento é particularmente relevante na resolução de problemas práticos, nos quais a transformação ou aproximação de uma distribuição por outra pode simplificar processos complexos e otimizar soluções. No entanto, o enfoque aplicado dessas relações nem sempre é explorado com profundidade em livros-texto de probabilidade, reforçando a necessidade de exemplos contextualizados no cotidiano para complementar e consolidar o conhecimento teórico.

Os exemplos abordados neste estudo, como a cobrança de pênaltis em partidas de futebol e o envio de mensagens em grupos de *WhatsApp*, demonstram como conceitos probabilísticos podem ser aplicados a situações reais, tornando o aprendizado mais significativo e contribuindo para o ensino e a aprendizagem da probabilidade. Dessa forma, o trabalho evidencia o potencial das ferramentas matemáticas para a resolução de problemas práticos e reforça a relevância das distribuições de probabilidade e de suas inter-relações em diversos contextos e áreas de aplicação.

Como perspectiva para trabalhos futuros, sugere-se ampliar a abordagem das inter-relações entre distribuições de probabilidade, explorando aquelas não contempladas neste estudo. Além disso, recomenda-se o uso de simulações computacionais, que podem contribuir para representar tanto as inter-relações aqui discutidas quanto outras ainda não abordadas.

REFERÊNCIAS

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2017.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

CONTI, K. C.; BÔAS, S. G. V. Acaso e probabilidades nos anos iniciais: potencial dos jogos como mediadores na construção do conhecimento. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 3, n. 2, p. 379–399, 2019.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências**. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1994.

GREGERSEN, E. (Ed.). **The Britannica Guide to Statistics and Probability**. New York: Britannica Educational Publishing, 2010.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: Vol. 1**. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HACKING, I. **The Emergence of Probability**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

KATTI, S. K.; RAO, A. V. **Handbook of the Poisson Distribution**. Abingdon: Taylor & Francis, 1968.

MEYER, P. L. **Probabilidade – Aplicações à Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

SANTOS, L. C.; NAVA, D. T. Situações cotidianas sob o olhar da probabilidade. *In*: FERREIRA, J. B. (Ed.). **Engenharias, Ciências Exatas e da Terra: Pesquisas Básicas e Aplicadas**. Rio Branco: Stricto Sensu, 2021. p. 216–237.

STIGLER, S. M. Poisson on the poisson distribution. **Statistics & Probability Letters**, v. 1, n. 1, p. 33–35, 1982.

TRIOLA, M. F. **Elementary Statistics**. Boston: Pearson, 2010.