IMPLICAÇÕES DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ENSINO DO CÁLCULO

Francisco Regis Vieira Alves(*)

RESUMO

Este artigo apresenta e discute alguns elementos relacionados à Teoria das Representações Semióticas. Sua pertinência se destaca no ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, tendo em vista que a citada teoria proporciona um viés de explicação e descrição para diversos fenômenos vinculados ao amplo conjunto de representações e simbologias da quase totalidade dos objetos conceituais do Cálculo. Assim, descrevem-se ao longo do texto algumas noções formuladas por Duval (1996; 1991) e interpretam-se algumas situações-problema neste contexto de ensino/aprendizagem, com a intenção precípua de salientar alguns elementos de natureza cognitiva, quando comparados a outros elementos de natureza lógico-matemática. Acentuam-se alguns casos específicos do Cálculo, comparando-se o ensino restrito ao lápis/papel com um ensino apoiado num recurso computacional, realçando-se as aplicações das noções de *formação*, *tratamento* e *conversão* de registros, formuladas por Duval.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria das Representações Semióticas. Ensino/aprendizagem. Cálculo.

ABSTRACT

This article presents and discusses some elements related to the Semiotics Representation Theory. Its relevance is highlighted in the teaching/learning of differential integral calculus, considering that the mentioned theory provides an explanation and description of bias for various phenomena linked to the broad range of representations and symbols of almost all the conceptual object of calculus. Thus, we describe, throughout the text some ideas formulated by Duval (1996, 1991) and we interpret some problem situations in the context of teaching and learning, with the intention to highlight some major duty of cognitive elements when compared with other elements of logical-mathematical nature. A few specific cases of calculation are emphasized, comparing teaching restricted to pencil and paper with a guideline supported by a computational resource, highlighting the applications of the concepts of training, managing and conversion of records, made by Duval.

KEYWORDS: *Semiotics Representation Theory. Teaching/learning. Calculus.*

1 INTRODUÇÃO

Professor do Institut Universitaire de Formation de Maitre – IUFM, na cidade de Lille, pesquisador internacionalmente conhecido na área de Educação Matemática, Raymond Duval, ao conceber a Teoria das Representações Semióticas[1], forneceu uma leitura e interpretação diferenciada, além de extrair profícuas implicações para certos fenômenos eminentemente de natureza cognitiva da aprendizagem em Matemática.

De modo enfático, no início de sua obra principal, intitulada Sémiosis et Pensée Humaine, Duval sublinha a peculiaridade da aprendizagem das matemáticas a qual requer atividades cognitivas que exigem a utilização de sistemas de expressões e representações diferenciados da língua natural (1995, p. 1). De fato, na Matemática, lidamos com números, notações simbólicas para objetos conceituais, quantificadores, escritas algébricas e lógicas que podem assumir uma importância tão primordial quando a nossa própria língua natural, no que diz respeito à comunicação das idéias matemáticas.

(*)Doutor em Educação, professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, *campus* de Fortaleza, e-mail: fregis@ifce.edu.br

[1] No Brasil, destacamos os trabalhos de doutoramento de Karraer (2006) e Mariani (2006) que a empregam com o intuito de descrever e analisar alguns fenômenos de natureza cognitiva peculiares à atividade matemática.

O uso recorrente de simbologias particulares nos diversos ramos elementares, como na Aritmética, Álgebra e Geometria, constitui um modo particular de nos comunicarmos e generalizarmos determinadas concepções relacionadas com estes e outros ramos da Matemática. Diante desta argumentação que diz respeito a uma realidade que assume relevância em sala de aula, Duval (1995, p. 1) questiona se a utilização de vários sistemas semióticos de representações e expressões é essencial ou, de outro modo, é um meio cômodo, mas secundário para o exercício e desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais?

Referenciando-nos ainda em sua argumentação inicial, observamos que a resposta para tal questionamento ultrapassa os limites da Matemática. Além disso, um professor qualquer, mesmo o especialista na área, não conseguiria uma resposta satisfatória para tal pergunta, amparado apenas num *corpus* teórico formal inerente ao saber matemático que, apesar de amplamente especializado no último século, fracassa na tentativa de explicar o motivo pelo qual os conceitos matemáticos podem ser efetivamente internalizados, elaborados e organizados em esquemas cognitivos idiossincrásicos ao sujeito cognoscente.

Outra questão discutida em sua teoria se refere à distinção entre um objeto matemático e suas múltiplas representações. Neste sentido, ele recorda que um objeto matemático pode ser dado a partir de representações bastante diferentes (1945, p. 3). E como tencionamos abordar nas próximas seções algumas questões específicas relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral, podemos exemplificar, baseando-nos na literatura especializada, as seguintes notações relacionadas com a derivada de funções num ponto particular:

$$(i)\ \mathrm{f}'(x_0)\ ;\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}_0)\ ;\ \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}_0)\ ;\ \mathrm{D_x}(\mathrm{f}(\mathrm{x}_0))\ ;\ \mathrm{D_x f}(\mathrm{x}_0)\ ;\ \mathrm{f}'(x_0);\ y'(x_0)\,.$$

$$(ii)\left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(x_0,y_0)\right]_{\mathrm{y}=\mathrm{y}_0};\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(x_0,y_0)\ ;\frac{\partial \mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial \mathrm{x}}\ ;\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}[\mathrm{f}(x_0,y_0)]\ ;\ \mathrm{f_x}(x_0,y_0);D_x[\mathrm{f}(x_0,y_0)]\,.$$

Destacamos nos itens (i) e (ii), notações ordinariamente empregadas no Cálculo Diferencial e Integral em Uma e a Várias Variáveis, no caso de funções do tipo $y = f(x)$ e z=$f(x,y)$. Neles fazemos referencias ou, como dizemos no jargão matemático, denotamos o objeto derivada de uma função num ponto. Percebemos claramente as preocupações de Duval quando divisamos a diversidade de simbologias para o mesmo objeto conceitual, o que pode proporcionar dificuldades aos estudantes, uma vez que algumas destas representações pertencentes ao *locus* acadêmico podem ser inertes e não sugerem nenhum tratamento (DUVAL, 1995, p. 3).

No caso específico do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real e no Cálculo a Várias Variáveis, que abreviaremos respectivamente por CUV e CVV, a situação pode se mostrar de modo diferenciado, uma vez que encontramos vários exemplos na História da Matemática nos quais determinadas simbologias ou notações se mostraram mais exitosas do que outras, com destaque para o seu lado operacional e aplicado. Nesta discussão introdutória, todavia, não ensejamos nos aprofundar em questões de ordem histórica, e sim discutir alguns elementos relacionados ao ensino/aprendizagem, na produção científica devida a Duval. Decerto o pesquisador francês aponta para questões polêmicas e preocupações referentes ao ensino, mas, antes de apresentar uma argumentação pormenorizada sobre estas e outras questões, destacamos a atenção dedicada por Duval aos fenômenos psicológicos envolvidos no ensino/aprendizagem em Matemática, como, por exemplo, o caso das representações mentais, descritas por ele como o conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode possuir sobre um objeto ou situação, e o que o mesmo associa. (DUVAL, 1995, p. 3)

Sua perspectiva permite inferir que um bom ensino de Matemática pressupõe a promoção e, consequentemente, a evolução de representações mentais adequadas e flexíveis, para cada situação envolvendo potencialmente um problema digno de atenção do estudante. Note-se que, em seguida, ainda no que se refere à atividade matemática, exigimos a produção adequada de um registro que se constitui por meio de símbolos (enunciados na língua natural, fórmulas algébricas, gráficos, figuras geométricas etc). Por influência da tradição peirceana, Duval nomeia tais objetos de representações semióticas e explica que tais representações semióticas são inteiramente subordinadas às representações mentais e preenchem uma função de comunicação (1995, p. 3).

Duval (1995, p. 16) salienta ainda uma função das representações que se constitui a partir da possibilidade de codificação da informação, de modo que a informação pode ser descrita em determinado sistema de tratamento. Outra consequência é a possibilidade de ‘evocação de objetos ausentes’ que podem ser identificados de modo consciente no imaginário do sujeito. A este respeito, Duval explica que imagens mentais são entidades psicológicas possuindo uma relação com a percepção (1995, p. 28).

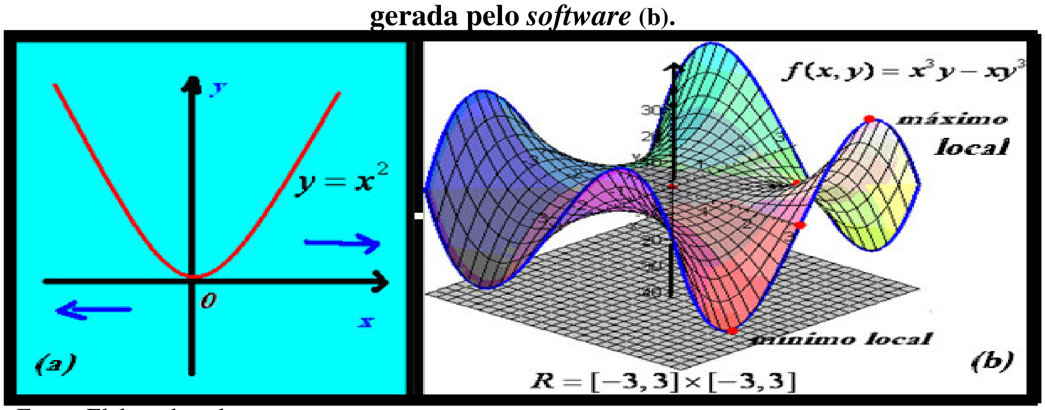
Por ultimo, vale destacar que as representações mentais dizem respeito a um domínio mais amplo do que das *imagens mentais*; entretanto, ambos os elementos destacados se relacionam e participam de todo raciocínio matemático que, reconhecidamente, propicia a abstração dos conceitos. Na próxima seção, forneceremos alguns exemplos específicos, na medida em que discutiremos outras noções concebidas por Duval.

2 REPRESENTAÇÕES E APRENDIZAGEM NO CÁLCULO

A noção de representação é essencial em Psicologia, no que se refere ao comportamento com vias a aquisição de conhecimentos (DUVAL, 1995, p. 23), E de modo particular na Matemática, em toda troca de informações, principalmente quando no referimos ao contexto do ensino, os conhecimentos são sistematizados e veiculados de modo cifrado em linguagens próprias desta Ciência.

Neste sentido, Duval (2000, p. 58) salienta que o pensamento humano requer a mobilização de um heterogêneo sistema produtivo de representações e sua coordenação. De modo peculiar, encontramos uma diversidade de sistemas de representações que condicionam a operacionalidade, os ‘modelos mentais’ que necessitamos adquirir e, posteriormente, possibilitam a mobilização destes para uma evolução conceitual consistente. De fato, quando apresentamos a um estudante escolar a seguinte função $y = x^2$ e questionamos sobre o menor valor assumido por tal função, recorrendo a uma representação particular no $\mathbb{R}^2$, rapidamente o sujeito poderá inferir, observando a figura 1-(a) seguinte, do lado esquerdo, que vale zero na origem.

Figura 1: Representações de um mesmo objeto (a) e Representação de uma superfície gerada pelo *software* (b).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, se ao mesmo estudante perguntamos sobre o comportamento ou os valores assumidos quando x assume valores muito grandes, tanto para a esquerda do eixo das abscissas, quanto para direita, ele enfrentará dificuldades. Um dos motivos reside no aspecto completamente inusitado de exploração de uma representação particular do objeto função polinomial de grau 2 que é visivelmente limitado (figura 1 lado esquerdo). Este aspecto diz respeito ao emprego de ‘modelos mentais’ que envolvem maior abstração e que lidam com a noção de infinito, ordinariamente denotado no ensino de Cálculo por $+\infty$ ou $-\infty$.

Quando submetido a mesma situação, um estudante do *locus acadêmico* apresenta ‘modelos mentais’ especializados e específicos à teoria do Cálculo Diferencial e Integral. Evidenciamos até mesmo uma simbologia que representa um processo matemático que chamamos de ‘limite’, e viabiliza uma análise analítica do comportamento da função

$f(x)=x^2$. E, de modo sucinto, esperamos a resposta: $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, sem necessariamente recorrer ao comportamento do seu gráfico (figura 1-(a)).

Sublinhamos nesta tarefa considerada introdutória abordada em muitos livros didáticos, o emprego de representações algébricas e geométricas para a descrição do mesmo processo matemático. Ademais, o domínio de algumas regras operacionais é imprescindível. Na perspectiva da Teoria das Representações Semióticas, as regras operacionais intrínsecas ao conceito de limite são chamadas de 'tratamento'. E as possibilidades de descrição do mesmo objeto matemático, ora no quadro geométrico, ora no quadro algébrico ou ainda como representação linguística, é nominado por ele de 'conversão de representações'. Neste sentido, em um de seus trabalhos (DUVAL, 1993, p. 45) fala de *conversões* do tipo *ilustração* (conversão de uma representação linguística em uma representação figural) e *descrição* (conversão de uma representação não verbal em uma representação lingüística).

Apesar de fazer referência à Geometria Plana, suas colocações se coadunam de modo harmonioso no caso do Cálculo, mas, quando atentamos para outros ramos da Matemática amparados em seu ponto de vista, podemos nos surpreender com a complexidade envolvida nestas operações. De fato, dificilmente um estudante ou um professor, de posse apenas da representação analítica $f(x,y)=x^3y-xy^3$, conseguirá descrever o comportamento geométrico da superfície correspondente, como observamos na figura 1-(b).

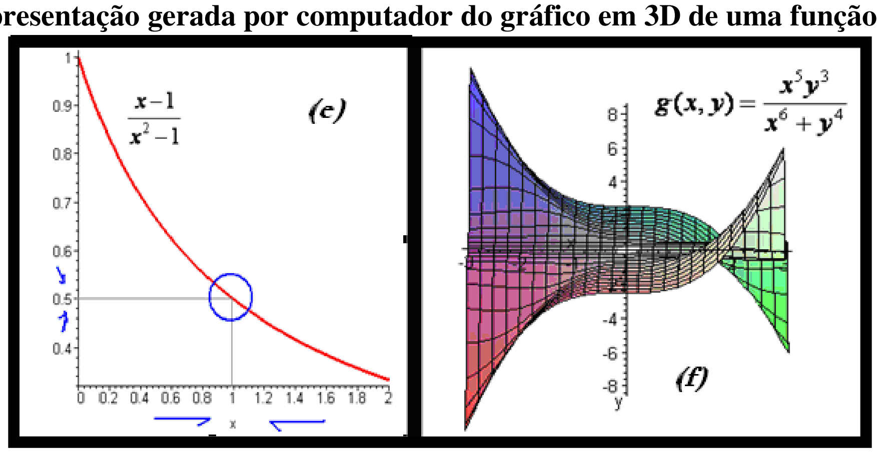
Destacamos que no ensino tradicional, restrito ao ambiente lápis e papel, a compreensão de propriedades geométricas destes objetos é inimaginável e a construção do seu gráfico em 3D é inexequível. De fato, uma vez que o professor dispõe apenas da representação analítica em 2D, como inferir propriedades intrínsecas desta superfície? Considerando apenas sua representação analítica, como divisar se ela possui algum eixo de simetria? De que modo poderíamos concluir, sem realizar "malabarismos" algébricos, se tal superfície possui algum ponto de máximo, mínimo local ou ponto de sela?

No ensino tradicional, respostas para estas questões são obtidas após considerável tempo e a exploração das representações algébricas parece possuir um caráter que confere maior legitimidade aos alunos se comparada à representação gráfica (MARIANI, 2006, p. 38). A representação na figura 1-(b) é proporcionada graças ao recurso tecnológico. Acentuamos ainda o fato de que nesta representação geométrica em 3D, percebemos uma variação de profundidade, identificamos uma espécie de simetria com referência a um eixo, distinguimos pontos de máximo e mínimo local sobre o referido objeto; propriedades que dificilmente extraímos pela simples observação do registro algébrico descrito por $f(x,y)=x^3y-xy^3$.

Antes, porém, de prosseguirmos em nossa discussão, enunciaremos três propriedades essenciais relacionadas aos fenômenos de natureza cognitiva. A primeira, como já mencionamos, diz respeito ao ‘tratamento’ de uma representação semiótica, que, segundo Duval, consiste numa transformação que produz outra representação no mesmo registro. Antes de dispormos de uma determinada representação semiótica, no entanto, devemos contar com uma teoria formal que fornece e define, de modo consistente e preciso, seus próprios objetos, simbolizados por notações matemáticas. Assim, Duval caracteriza a noção de ‘formação de uma representação’, como a atividade que exprime uma representação mental e salienta que tal atividade implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres do que desejamos representar (DUVAL, 1995, p. 36).

Por exemplo, no ensino do Cálculo, o aluno se depara com os seguintes limites: (c) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$; (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^3}{x^6+y^4}$. Em ambos os casos, o aluno é apresentado a uma série de procedimentos condicionados por modelos e teoremas que impõem um modo particular de realizar os cálculos sobre tais representações. Note-se que o ‘tratamento’ necessário para se obter alguma conclusão do caso (c) é bem mais simples do que no caso (d). Além disso, apesar de ambas as representações denotarem o mesmo processo, chamado de limites, os elementos correspondentes são dessemelhantes. De fato, no primeiro caso, o número real $x \in \mathbb{R}$ se aproxima de modo unidimensional de $x=1$, que, na reta real, pode ocorrer, tanto pelo lado esquerdo como pelo lado direito; entretanto, como a função $g(x,y)=\frac{x^5y^3}{x^6+y^4}$ possui o seguinte domínio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$, podemos aproximar o par ordenado (x,y) por vários caminhos no plano.

Figura 2: Interpretação geométrica do processo de aproximação do limite em 2D (e) e a representação gerada por computador do gráfico em 3D de uma função (f).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 2(f), observamos a *formação* da representação semiótica relacionada à função $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$. É curioso destacar a noção de que poderíamos reescrevê-la do seguinte modo $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}$, todavia, o fator comum pode ser cancelado apenas na condição em que tencionamos avaliar o limite (c). Já no caso da figura 2(f), evidenciamos que dificilmente um aluno ou professor conseguiria descrever, no ambiente lápis e papel, as características do comportamento desta superfície no IR^3. Aqui, a *formação* da representação semiótica é proporcionada pelo recurso de um *software* de Matemática.

No ensino de Cálculo, o aluno de um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática é apresentado, ao modelo formal de raízes weierstrassianas, conhecido por épsilon e delta (ε,δ). Frequentemente, o iniciante escuta o professor afirmar inferências lógicas do tipo: “dado um $\varepsilon>0$, existe um $\delta>0$ tal que... então $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ ou $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ ”. Esta relação apresenta um caráter condicionante, tamanha é a manifestação da força de seu emprego no discurso do professor. De fato, um aluno de um curso de graduação estuda, de modo padrão, três disciplinas de Cálculo. No primeiro ano acadêmico, ele observa que a relação $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ ou $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ pode ser empregada. De modo recorrente, no segundo ano acadêmico, seu professor comenta e explora o mesmo registro, que funciona de modo semelhante em outros limites, tal como no caso de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$; todavia, dificilmente a mesma ou suas variantes podem ser empregadas para a resolução dos seguintes limites $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^5y^3}{x^6+y^4}$ ou $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[x^2\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]$.

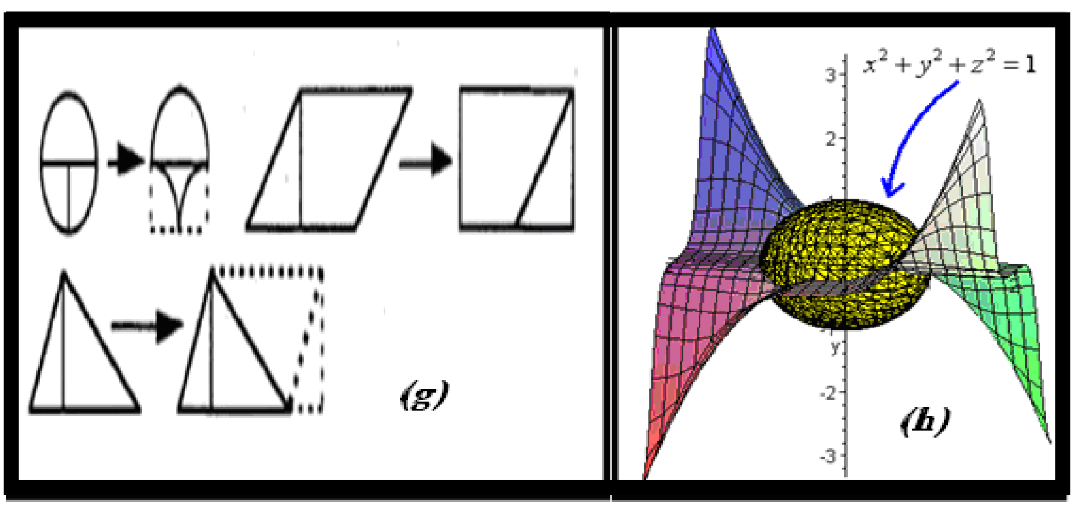
Duval (1995, p. 37) recorda que a formação de representações semióticas respeita as regras próprias do sistema empregado, não somente por razões de comunicabilidade, mas também, para tornar possíveis os meios de tratamentos intrínsecos para cada representação. Nestes casos considerados, por meio de um tratamento específico, podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$ e também que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^5y^3}{x^6+y^4}=0$, entretanto, as inferências e os tratamentos empregados são completamente distintos em ambos os casos. Note-se que, como já observamos que, dificilmente o aluno consegue encontrar uma relação explicita entre épsilon e delta neste último caso.

Percebemos nos exemplos passados a exploração do quadro geométrico e algébrico. Tal mudança decorre da possibilidade de conversão de representações, que Duval (1995, p. 40) caracteriza a conversão como a ação que possibilita passar de um registro para outro.

A exploração de uma diversidade de representações de um mesmo objeto matemático não é regra no ensino de Cálculo ou, de um modo geral, no ensino de Matemática. Duval (1995, p. 43) reforça nossa ilação, ao constatar que o ensino privilegia a aprendizagem de regras concernentes à formação de representações semióticas e as concernentes ao seu tratamento. Vale esclarecer que uma exploração didático-metodológica no ensino de Cálculo não constitui simples tarefa. De fato, quando comparamos alguns objetos da Geometria Plana (figura 3(g)), identificamos propriedades geométricas perceptíveis e que podem ser concebidas mentalmente num exercício de criatividade com estudantes; todavia, o mesmo não se pode afirmar em relação aos objetos do Cálculo que envolvem imagens mentais elaboradas (figura 3(h)).

Na figura 3(g), observamos um exemplo fornecido por Duval (1999, p. 9). A respeito das operações realizadas sobre os objetos representados neste exemplo, explica que unidades figurativas podem sofrer mudanças e re-configuradas, mentalmente ou materialmente, em outra figura. [...] Muito frequentemente, a solução de problemas e explicações são empregadas para convencer os estudantes e recorrer a tais transformações como imediatas o óbvias para o estudante. Podemos observar isto na figura 3(g):

Figura 3: Duval (1999, p. 9) explica as mudanças figurais (g) e representação gerada por computador (h).



Fonte: Elaborada pelo autor

Quando fazemos referência, porém, à teoria do Cálculo Diferencial e Integral, as explicações dadas há pouco por Duval apresentam um campo restrito de aplicação. De fato, em várias situações de aprendizagem, conceber alguma reconfiguração mental, como os objetos em 3D que representamos há pouco, mesmo para uma mente treinada e experiente, no caso do professor, é quase impraticável.

Duval referencia o âmbito da resolução de problemas em Matemática. Observamos que ele acentua a importância de convencimento dos estudantes. Por exemplo, não é imediata a tarefa de mostrar que a função $g(x,y)=\dfrac{x^5y^3}{x^6+y^4}$ é limitada na origem, quando exploramos registros algébricos; entretanto, podemos convencer o estudante, ao visualizar a figura 3(h), que conseguimos uma bola ou esfera, de raio 1, descrita pela equação $x^2+y^2+z^2=1$ e, assim, notar/perceber que seu gráfico fica completamente no interior dela, quando nos aproximamos da origem $(0,0,0)$. Do ponto de vista geométrico, entretanto, propriedades como esta não podem ser exploradas, sem o auxílio computacional. Aliás, no ensino restrito ao quadro branco, o professor tenta improvisar, em dependência de suas habilidades pessoais, figuras particulares de objetos no $\mathbb{R}^2$ que residem no espaço $\mathbb{R}^3$. Podemos citar como exemplo a formulação: dado $\varepsilon>0$ devemos mostrar que existe $\delta>0$, tal que $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ sempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$.

Sublinhamos que, no que concerne ao iniciante, dificilmente conseguirá extrair uma interpretação geométrica deste modelo de raízes weierstrassianas, sem mencionar que tal modelo é um dos primeiros a serem apresentados e discutidos em sala de aula, num sentido contrário ao que de fato observamos no percurso histórico de desenvolvimento do Cálculo. A este respeito, Grabiner (2009) recorda que:

> Quando Newton e Leibnitz inventaram o Cálculo, no final do século XVII, eles não usavam épsilon e delta em suas provas. Necessitou-se de 150 anos para o seu desenvolvimento posterior. Isto significa que provavelmente seja laboriosa a tarefa de compreender as bases rigorosas do Cálculo. (p. 5, tradução nossa.)

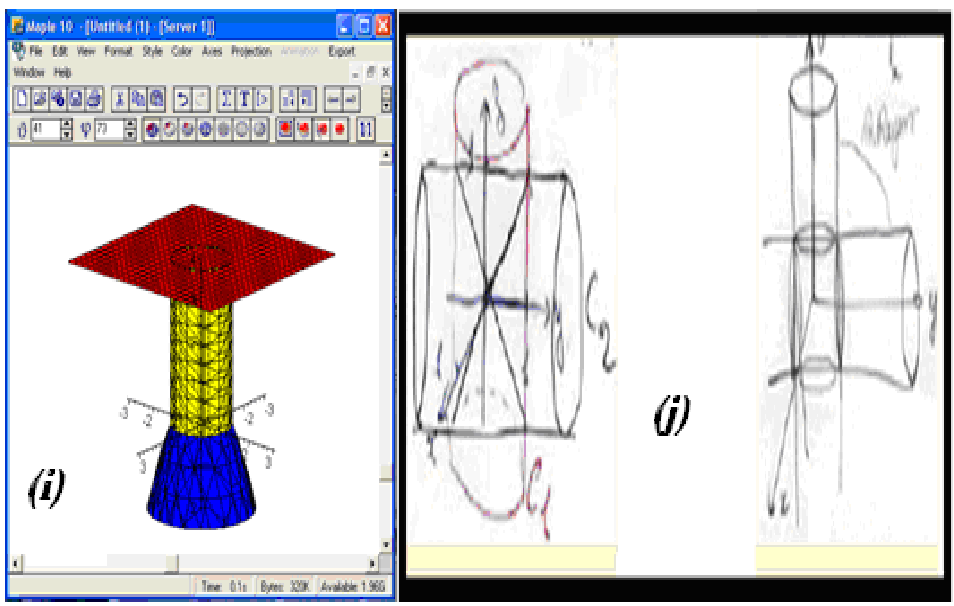
A atividade matemática, geralmente, requer a ativação paralela de dois ou três registros de representação (DUVAL, 1999, p. 6), todavia, no ensino de Cálculo sem o recurso computacional, os registros de que dispõe o professor apresentam-se razoavelmente limitados. Por fim, a aprendizagem avaliada e inferida em testes ou provas se restringe à aplicação de um conjunto de regras e de procedimentos, como o ‘modelo épsilônico’, os quais, passado algum tempo, são paulatinamente esquecidos.

Outro exemplo de situações-problema que exigem um cálculo fastidioso que, no final das contas, provoca pouco avanço significativo no conhecimento do estudante, refere-se ao estudo de integrais múltiplas. Para exemplificar, apresentamos uma situação-problema que segue o viés do ‘ensino tradicional’ restrito ao ambiente lápis/papel no contexto da exploração de registros bidimensionais no cálculo de uma *integral*.

Problema. Consideremos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, o plano $z = 4$ e o parabolóide elíptico descrito por $z = 1 - x^2 - y^2$. Calcular o volume limitado pela região entre tais objetos.

Um esboço qualquer de uma figura, neste caso para servir como guia condutor para o raciocínio, é completamente inviável, exceto, para os alunos mais talentosos e habilidosos. Em rotinas desta natureza, é corriqueira na identificação dos limites definidos da *integral tripla* necessária para a sua solução, todavia, dificilmente os estudantes apresentam alguma noção ou entendimento a respeito do que de fato o valor numérico encontrado significa o volume de uma região limitada no espaço $\square^3$ (figura 4(i)).

Figura 4: Representação da região limitada pelos objetos gerada por *software Maple* (i) e os esenhos produzidos pelos alunos no plano (j) (HENRIQUES, 2006, p. 256).



Fonte: Elaborada pelo autor

Na tese de Henriques (2006), encontramos uma análise extensa de questões de ordem metodológica e didáticas relacionadas ao uso do recurso tecnológico no ensino de CVV. Logo no início, o autor destaca as tímidas iniciativas de abordagem semelhantes no Brasil. Com relação às tarefas específicas relacionadas com a noção de integração, Henriques (2006) destaca:

> As tarefas comportam expressões algébricas relativamente simples. Eles podem resolver por um método puramente analítico, sem fazer apelo ao desenho, para determinar o domínio de integração. Mas se podemos nos apoiar nos desenhos, a compreensão do problema pode ser simplificad. (p. 242, tradução nossa).

Este autor exibe algumas figuras (figura 4(j)) produzidas no ambiente lápis/papel pelos sujeitos participantes do estudo. Nelas observamos o esforço intelectual de representar objetos tridimensionais restritos ao plano; embora tais representações provoquem uma função discursiva/descritiva dos sujeitos a respeito do que é concebido ou percebido. Falaremos da relevância desta função cognitiva na seção seguinte.

3 ATIVIDADE ARGUMENTATIVA E DEMONSTRATIVA

No início do seu artigo, Duval (1991, p. 233) realça a ideia de que as dificuldades apontam que a maior parte dos estudantes experimenta que compreender uma demonstração constitui um dos obstáculos mais resistentes ao qual se rende o ensino de Matemática. Nesse artigo, Raymond Duval investiga algumas dificuldades na aprendizagem da noção de demonstração em Geometria Plana, para crianças numa faixa etária de 13-14 anos, segundo o sistema de ensino francês. Uma questão discutida diz respeito às diferenças entre a atividade argumentativa e uma atividade demonstrativa. As consequências são imediatas para o professor de Matemática que, não diferenciando uma argumentação de uma demonstração, não logrará êxito na criação de um terreno fértil para a mobilização de saberes distintos relacionados com estas duas noções.

Vejamos, entretanto, algumas questões iniciais expressas pelo didata francês. Logo no início, Duval adverte que, no funcionamento do raciocínio, é importante distinguir dois tipos de passagem: um corresponde a um passo de raciocínio, e outra consiste na transição de um passo de raciocínio para outro. O primeiro tipo constitui uma inferência, o segundo um ‘encadeamento’ (1991, p. 235).

O primeiro tipo de passagem a que Duval faz referência é conhecido como ‘inferência’. Por exemplo, quando temos um triângulo retângulo ΔABC, de catetos $\overline{AB} = b$ e $\overline{AC} = c$ e hipotenusa $\overline{BC} = c$, então, por meio de uma ‘inferência’, concluímos que $c^2 = a^2 + b^2$. De modo semelhante, se sabemos que num triângulo qualquer ΔABC, temos a seguinte relação entre os catetos e a hipotenusa, $c^2 = a^2 + b^2$, então, necessariamente, inferimos que o mesmo deve ser retângulo com relação a algum dos seus vértices.

Note-se que acabamos de descrever o teorema de Pitágoras e sua pouco divulgada e/ou conhecida recíproca. Duval explica que este tipo de ‘inferência’ ou passagem se faz por meio de uma ‘regra explícita’, relevante a uma teoria, assim o passo de raciocínio possui uma organização ternária (1991, p. 235). Tal observação introduzida por Duval proporciona uma distinção inicial entre o raciocínio dedutivo e o raciocínio argumentativo. Com relação a este último, além da dependência das representações dos interlocutores, é justamente o recurso e emprego de ‘regras’, nem sempre explícitas e de validade reconhecida, condicionado pela própria estrutura da língua, o que revela um caráter marcante desta última forma de raciocínio.

Por outro lado, notamos que, no caso particular do teorema de Pitágoras, apenas o 'estatuto operatório' é levado em consideração, ou seja, a possibilidade concreta de verificar a tese, referendando-se nas premissas mencionadas há pouco. Em relação a este fato, Duval esclarece:

> Dizendo de outro modo, em um passo de dedução, as proposições não são relacionadas em função de suas relações semânticas entre seus conteúdos respectivos (oposição, sinonímia, particularização, etc), mas unicamente em virtude de seu estatuto previamente fixado (hipóteses de partida ou conclusões já obtidas e regras de inferência). (1991, p. 236, tradução nossa.)

Tal variabilidade do estatuto operatório de uma proposição proporciona atividades desconcertantes aos estudantes que, geralmente, consideram de modo prioritário o seu 'conteúdo', em detrimento de amplo domínio de sua operacionalidade, dentro de uma teoria. Vejamos, porém, um exemplo específico no Cálculo. Temos por exemplo a seguinte proposição: toda função diferenciável do tipo (I) $y = f(x)$ ou (II) $z = f(x, y)$ deve ser contínua. Encontramos este resultado com facilidade nos livros de Cálculo.

Vamos comparar as representações semióticas ordinárias requeridas nos casos (I) e (II). Em (I), desde que partimos da premissa de que a função é diferenciável, escrevemos: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} = 0$. No caso (II) temos a condição do limite $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - T(x, y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$, onde $L(x) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x$ e $T(x, y) = f(x_0, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$.

Geralmente, nos livros didáticos, encontramos alguma interpretação geométrica para a propriedade descrita em (I). A interpretação geométrica usual é que este limite representa o 'erro' que se comete ao tentar aproximar a função $y = f(x)$ da reta tangente ao gráfico $L(x) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x$, no ponto $(x_0, f(x_0)) \in IR^2$. Já no caso (II), o limite é interpretado como o 'erro que se comete ao aproximar uma superfície no IR^3 de um plano tangente no ponto $(x_0, y_0, f((x_0, y_0))$'. Note-se que estas formulações proposicionais que caracterizam o comportamento e a posição relativa entre dois objetos ($curva - reta$ e $superfície - plano$) permite um raciocínio argumentativo bem mais amplo do que comparado às proposições produzidas a partir da dedução da respectiva demonstração formal. Por outro lado, observamos que o 'estatuto operatório' é preferido pelo professor, na medida em que fornece maior nível de confiança.

Na perspectiva de Duval, encontramos a caracterização do que ele chama de ‘atitudes proposicionais’. Tal noção é caracterizada como segue: as expressões chamadas ‘atitudes proposicionais’, podem igualmente preencher um papel: “sabemos que...(proposição de entrada), estou certo de que...(conclusão), graças ao teorema...”. Mais adiante, Duval (1991) acrescenta:

> Nos prendemos a uma proposição, em geral, ao seu valor lógico: ela é verdadeira ou falsa. Mas independentemente de seu valor, ou em relação a tal, uma proposição pode possuir outros valores: ela pode parecer evidente e incontestável, incerta, conjeturável, absurda, indecidível, possível, etc. [...] O valor epistêmico é grau de certeza ou de convicção atribuída a uma proposição. Toda proposição, assim, possui um valor epistêmico pelo simples fato que seu conteúdo é considerado como relevante ou de uma opinião, ou de uma crença, de uma suposição, ou de uma evidência comum, ou de um fato estabelecido, ou de uma convenção, etc (p. 254-255, tradução nossa).

O longo excerto de Duval merece vários comentários e esclarecimentos. Salientamos que o primeiro aspecto mencionado referente ao ‘valor lógico’ de uma proposição, transforma-se numa exigência constante no ensino/aprendizagem de Cálculo. Tão intensa é tal exigência que, praticamente, todo o seu ensino gravita ao redor deste fato. Vale recordar que, quando um professor contempla e busca verificar determinada inferência, esta, para o experiente, já possui um valor lógico verdadeiro, uma vez que ele conhece, detém aquele conhecimento que diz respeito à determinada propriedade formal enunciada. Ao passo que, para o aluno, toda a sua idiossincrasia repousa no campo da ‘crença’, na compreensão de um conteúdo; uma vez que, na maioria das ocasiões, o aluno não sabe com exatidão aonde o professor tenciona chegar.

Assim, retomando os exemplos dos teoremas mencionados há pouco, para o estudante, as atitudes proposicionais diante da proposição enunciada em cada caso podem ser duas: (i) aceitação imediata e sem compreensão da verdade do conhecimento enunciado pela proposição ou (ii) manifestação de dúvida ou incerteza quanto à credibilidade da mesma (relacionada ao valor epistêmico).

Sublinhamos que ambos os itens dependem diretamente do modo de condução/mediação do docente em sala de aula. O professor de Cálculo pode ser aquele simpatizante do formalismo, que, em determinados aspectos, privilegia o tecnicismo, caracterizado pela hegemonia do raciocínio algorítmico e dedutivo. Deste modo, compreendendo ou não, uma regra (procedimento) é estabelecida de modo pouco questionado pelo mestre.

Por exemplo, os alunos costumeiramente são apresentados ao seguinte teorema formal ‘se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então $z = f(x, y)$ possui derivadas parciais em (x_0, y_0)’. De modo resumido, a demonstração da tese a que esta proposição faz referência é executada pelos livros didáticos e, consequentemente pelo professor, da seguinte forma sistemática: desde que, por hipótese, f é diferenciável, teremos por definição $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}=0$. Segue que num caminho particular, temos:

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)-a.\Delta x-b.0}{|\Delta x|}=0$.E, portanto, escrevemos:

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, 0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=a$, onde $a\in\mathbb{R}$.

No fim deste ritual, divisamos nos livros didáticos (BUCK, 1965; CHANON, 2009; GUIDORIZZI; 1986; LARSON, 1998; LEITHOLD, 1982; KAPLAN, 1993; SWOKOWSKI, 1979; STEWART, 2004) a seguinte codificação 'c.q.d.', que em Matemática, significa, 'como se queria demonstrar', mas cabem aqui alguns questionamentos.

O primeiro diz respeito à dimensão subjetiva do estudante, quando não podemos afirmar tacitamente se este manifestou interesse e desejo de demonstrar a referida propriedade salientada pelo professor. Segundo: o teorema acima se refere à noção de 'existência' das derivadas parciais e, partindo deste pressuposto, podemos esperar que o estudante, no seu universo ingênuo e particular, compreenda a noção de existência de uma derivada parcial?

Na prática, esta noção apresenta grande significação para o matemático profissional que possui uma visão local e global daquele conteúdo. Neste sentido, Poincaré (1906, p. 7) dizia que as matemáticas são independentes da existência de objetos materiais. E a palavra 'existir', em Matemática, não possui outro sentido que não seja isento de contradições. Deste modo, estabelecer a existência de uma das derivadas parciais pode satisfazer a necessidade pessoal do professor, embora para o aluno todo aquele esforço parece descabido e sem sentido. Terceiro: uma vez estabelecida a verdade matemática relacionada à proposição enunciada, podemos esperar que, a partir daí, mediante o seu emprego nas situações-problema, sua aprendizagem, compreensão e significação para o estudante esteja assegurada?

Se aceitarmos de modo imediato e automático, tão automático quanto à exposição e apresentação deste teorema, que as respostas para tais questões são pouco relevantes no âmbito do ensino/aprendizagem, reduzimos a importância dos fenômenos envolvidos na aprendizagem e, consequentemente, à atividade do professor ao ensino. De fato, evidenciamos na prática crenças descabidas que asseguram que 'um bom domínio de conteúdo é suficiente para qualquer aprendizagem'.

No *locus* acadêmico, via de regra, o aluno assiste à exposição dos teoremas, copia as demonstrações em seu caderno, e, na sequência, realiza uma série de exercícios, que na maioria dos livros de Cálculo Avançado, emprega rotinas e procedimentos que acentuam o caráter operatório dos conceitos em detrimento do caráter conceitual e semântico. Pode-se mesmo questionar a eficácia deste tipo de ensino quando, ao final da resolução exaustiva de inúmeros exercícios envolvendo a noção de derivada parcial, questionarmos aos alunos: o que é mesmo uma derivada parcial? Que relações perspectivamos entre esta e a derivada de uma função a uma variável real?

Sem muito rigor na apuração de dados que fornecem alguma explicação para esta questão preocupante, escutamos a seguinte declaração recorrente: 'há, professor...saber o que é eu não sei...mas sei fazer as contas!' A demonstração do teorema que mencionamos, entretanto, ainda requer um último comentário. Neste sentido, reavemos as ideias do filósofo francês Paul Souriau (1852 – 1926), quando, em seu livro Théorie de L'Invention, de 1881, se destaca pelo interesse de análise da atividade mental que requer o emprego da intuição no campo da atividade artística. Ele cunhou a expressão 'pensar de lado' [2], que, de uma perspectiva metafórica, compreendemos como a capacidade em Matemática de mobilizar dois raciocínios de modo concomitante; entretanto, haja vista a natureza eminentemente linear e inferencial da atividade dedutiva, diferentemente da atividade argumentativa, os raciocínios possíveis de se executar ao mesmo tempo, dizem respeito, necessariamente, a um raciocínio dedutivo e outro intuitivo.

Esta última afirmação requer um exemplo. Vamos imaginar então que um professor inicia a resolução efetiva de uma situação-problema. Com toda a sua experiência, ele consegue divisar os instrumentos conceituais mais indicados para o emprego efetivo na resolução. Vamos considerar ainda que o docente está restrito ao ensino sem recursos computacionais. Assim, ao dar continuidade na sua resolução, desde que se trata de um conhecimento familiar e habitual, como todas as inferências lógicas (*) bem conhecidas, o professor pode, em determinadas situações, simplesmente aplicar e produzir resultados baseados no poder das inferências lógicas e os elos necessários são identificados, relacionados e aplicados quase automaticamente, com arrimo do cálculo proposicional, de raízes aristotélicas. Evidenciamos isso na cadeia (*).

$$p_1 \to p_2 \to p_3 \to \cdots \to p_{n-1} \to p_n \text{, onde } \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{n-1}, p_n\} \ (*)$$

Assim, no decorrer do tempo, produzindo uma atividade praticamente mecânica, porque extremamente conhecida, o professor continua a apresentar sua resolução aos seus pupilos com a mesma facilidade com que descascaria uma laranja. Bem, aos olhos do

[2] Souriau (1881, p. 7) explica que quando direcionamos nossa palavra, nosso pensamento vai além. Com esta colocação ele fornece uma significação para o termo 'pensar de lado'.

estudante, toda essa cena parece inebriante. É comum o estudante dizer para si mesmo ou comentar com seus colegas: Poxa, quando ele faz parece tão fácil!

Vamos supor, entretanto, que o professor experiente comece a sentir que algo não anda muito bem ou não funciona como previsto. O docente percebe/sente que há alguma inconsistência envolvendo a ideia de sua estratégia. Assim, ele começa a 'pensar de lado', ou seja, ao passo que emprega suas inferências lógicas e escreve na lousa o produto de sua atividade dedutiva, o professor imagina e antecipa mentalmente o final de sua argumentação, com a esperança de alcançar ou não o objetivo final da questão. Portanto, enquanto escreve as representações necessárias para a sua solução, notou a partir deste 'pensamento lateral' que permitiu o avanço do raciocínio intuitivo, algo relacionado ao fato de que a sua ideia conduzirá a um erro ou contradição. De fato, qualquer aluno já deve ter deparado um professor de Matemática que simplesmente abandonou uma argumentação inicial para a resolução de um problema, ao admitir que a ideia não seria muito adequada no caso.

Admitimos que uma habilidade desta natureza não é obtida de modo automático em nossos alunos, entretanto, nunca será desenvolvida se não for, por sua vez, cuidadosamente instigada. É interessante compreendermos o papel de dois elementos citados na situação anterior. O primeiro diz respeito ao papel da linguagem empregada e escrita na lousa pelo mestre. E o segundo elemento se refere à capacidade de organizar e sistematizar as ideias matemáticas envolvidas. Destacamos que Duval não foi o único a observar a íntima relação entre estes elementos. Neste sentido, podemos destacar Sauriau (1881, p. 128), quando explica que a linguagem é capaz de substituir o pensamento, uma vez que as palavras podem substituir as ideias. E, mais adiante, Sauriau (1881) acentua que:

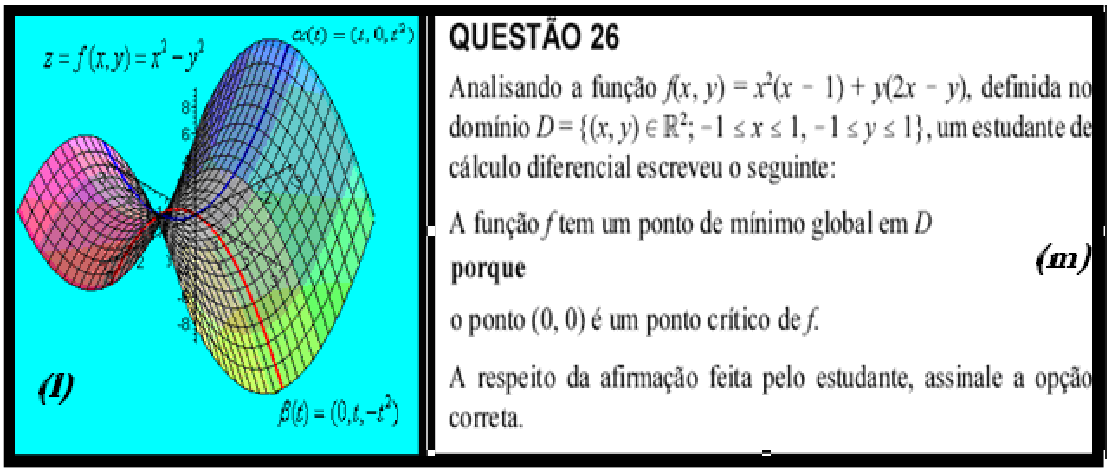
> Quando mencionamos, por exemplo, a palavra 'triângulo', ou se a vemos escrita, imaginamos imediatamente a figura geométrica que aprendemos associar a este som ou letras. E de modo similar, se pronuncio ou escrevo esta palavra, sabemos que a mesma não faltará em me sugerir uma concepção semelhante. Assim, as palavras possuem a propriedade de despertar em nossos espíritos certas imagens, que são o que denomino de significação (p. 121, tradução nossa).

Mais uma vez trazemos um autor reportando a uma teoria que, do ponto de vista geométrico, não fornece tantas dificuldades ao entendimento, como no caso do Cálculo. De fato, desafiamos um estudante ou um professor imaginar a superfície (parabolóide hiperbólico) descrita por $f(x,y)=x^2-y^2$ (figura 5(l)). Até seu nome, aos olhos dos iniciantes, parece esquisito. Desafiamos também, a partir de um exercício mental, a concepção e a localização de retas tangentes na direção dos eixos Ox ou Oy.

Neste caso particular, quando o aluno recorre às parametrizações $\alpha(t)=(t,0,t^2)$ e $\beta(t)=(t,0,t^2)$, a análise do seu comportamento no que se refere às taxas de variação $\frac{dz}{dx}(t)$

ou $\frac{dz}{dy}(t)$ é o mesmo que no caso do CUV, para funções em uma variável real, onde temos a seguinte notação $\frac{dy}{dx}$. Não se compreende bem o motivo pelo qual os livros didáticos não realizam a forte ligação entre estas representações que se relacionam com a mesma noção, a de declividade da reta tangente a uma determinada curva (figura 5(l)).

Figura 5: Representação de uma superfície e as possibilidades de cálculo da taxa de variação (a) e Exemplo de questão do ENADE-2008[3].



Fonte: Elaborada pelo autor

Destacamos o fato de que acrescentamos na figura a representação das curvas parametrizadas sobre a superfície. Com isto, o aluno pode observar todos os elementos em questão. A visualização aqui assume caráter singular e motivador para a aprendizagem. Com uma preocupação semelhante, Duval (1996, p. 6) salienta que os valores visuais significantes, ou pertinentes, da representação não são dados separadamente como numa escrita, mas são fundidos e integrados numa única forma percebida.

Note-se o papel importante desempenhado pela percepção e intuição do sujeito. Quando comparamos registros geométricos como registros analíticos do mesmo objeto matemático, as primeiras possibilitam uma apreensão bem maior quando comparadas com as segundas. Duval (1995) referenda nossa afirmação ao comentar que é largamente admitido que as figuras formam um suporte intuitivo importante nas tarefa em Geometria: elas possibilitam observar bem mais o que os enunciados não mencionam, permitem explorar e antecipar. (p. 180)

Como mencionamos nas seções anteriores, uma complexidade maior a ser considerada é a transição do cenário de apresentação destes objetos. Notamos que Duval

[3] Documento disponível no site: http://www.inep.gov.br/superior/enade/default.asp

referencia de modo particular o ensino de Geometria IR^2, enquanto nosso interesse da discussão se relaciona às representações semióticas localizadas no espaço tridimensional. Não apenas esta diferença, porém, merece atenção e provoca consideráveis mudanças no tratamento das representações do CVV. De fato, notamos que se tornam mais complexas as notações/simbologias; aumento da complexidade de regras e operações; argumentos formais sofisticados, em muitos casos explicados apenas com referência à Análise no IR^n, o que foge do horizonte de compreensão de um estudante de um curso de licenciatura.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Notamos nos trabalhos devidos ao francês Raymond Duval uma preocupação recorrente com a comunicação do conhecimento matemático, por intermédio e recurso a simbologias específicas. No caso da Matemática, seu papel é de destaque, uma vez que, *não* existe conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação (DUVAL, 1995, p. 15). Ainda com referência ao saber matemático, o autor fornece algumas implicações e condicionantes internos e externos relacionados ao uso de representações, ao concluir que:

> A diversificação de registros de representações semióticas é constante no desenvolvimento dos conhecimentos tanto do ponto de vista individual como cultural. Sua importância para o funcionamento do pensamento é geralmente explicado pelas diferenças de custo ou de limitação para a função de tratamento, e pelas funções responsáveis pela comunicação, que existem entre registros (DUVAL, 1995, p. 59, tradução nossa).

Nas seções passadas, discutimos a importância da comunicação, tanto as ideias veiculadas pelo professor como aquelas explanadas pelos estudantes. Em geral, estas podem ser identificadas na atividade argumentativa e dedutiva deles, embora esta última, por tradição e comodidade, seja sempre mais valorizada. Esta posição arbitrária é peculiar ao professor de Matemática que apresenta e estabelece suas notações e simbologias como um passe de mágica. Na perspectiva do autor aqui discutido, observamos certa negligência por parte do docente, no sentido de evidenciar o significado para as representações exploradas, tanto no caso específico do Cálculo como outros ramos da Matemática.

Outro fator preocupante é indicado por Ernest (1991, p. 250), quando recorda que a aprendizagem em Matemática é hierárquica, significando que existem itens do conhecimento e habilidades que são prerrequisitos necessários para a aprendizagem de outros itens matemáticos subseqüentes. De modo particular, notamos esta concepção em sala de aula, impregnando o ritual daquele professor, que dedica boa parte de sua aula na demonstração de todos os enunciados e demonstrações de teoremas, de modo seqüencial e sistemático. Ao final, a expectativa do docente é de que todo aquele conhecimento pode ser aprendido e compreendido, uma vez realizada sua explanação sistemática na lousa, e que automaticamente passam e ser prérrequisitos para outro aprendizado.

Na prática, o processo de internalização e elaboração progressiva de conceitos matemáticos é bem mais complicado e envolve mais elementos do que uma visão reducionista e obsoleta costuma contemplar. A aprendizagem depende de vários outros fatores do que apenas da exposição irrepreensível do mestre. Necessita-se, como vimos nas seções passadas, de um emprego conveniente de notações e/ou simbologias. Da exploração da dimensão intuitiva, da apreensão perceptual (ALVES, 2012d) dos conceitos matemáticos e não apenas do emprego do raciocínio condicionado pelo *tratamento* dos mesmos.

De fato, nesta parte final do trabalho, trazemos (figura 5(m)) uma questão presente na prova do ENADE/2008, referente aos conteúdos matemáticos específicos do curso de Licenciatura. É interessante que, para resolvê-la, o aluno não necessariamente precisa conhecer o registro geométrico de um ponto de máximo ou mínimo global. Não precisa também identificar o comportamento no plano dos pontos onde o campo definido pelo campo gradiente $\nabla f(x,y)$ se anula. A condição única nesta questão é recordar ou não as hipóteses e tese do teorema para o estudo da 2ª derivada para funções do tipo $z = f(x,y)$. O aluno pode até mesmo desenvolver o tratamento dos registros da questão, entretanto, se apresentarmos para ele a superfície referente à representação $f(x,y) = x^2(x-1) + y(2x-y)$, dificilmente ele conseguirá explicar, por meio de um raciocínio argumentativo, o comportamento em cada ponto indicado na questão.

Nesta questão, o que avaliamos do aluno é o conhecimento algorítmico, o valor lógico das proposições extraídas das hipóteses. Os únicos registros de representação explorados são a língua materna e os registros analíticos e não há coordenação de representações. Semelhantemente às questões que destacamos nas seções anteriores relacionadas à noção de limite, o estudante simplesmente executa um procedimento, mas pouco tem a falar, explicar e significar a origem ou o motivo de tais inferências lógicas, consequentemente não observamos a evolução de sua atitude proposicional (DUVAL, 1991).

No ensino notamos que os elementos lógicos sempre são mais visíveis e prioritariamente valorizados. Por outro lado, os elementos relacionados à aprendizagem são tomados de modo simplificado e, na maioria dos casos, não compreendidos e descuidados. A necessidade de considerar outros elementos no processo de ensino/aprendizagem é destacada por Duval (1999) quando explica:

> A atividade matemática possui dois lados. O lado visível e conclusivo é o dos objetos matemáticos e os processos válidos utilizados para resolver um dado problema. O lado crucial e escondido é o que se refere às operações cognitivas pelas quais podemos realizar, validar processos e ter acesso a tais objetos. (p. 24).

Ao longo deste texto, buscamos apresentar algumas situações-problema que evidenciam uma crítica ao ensino do Cálculo que se fortalece apenas no lado visível da Matemática, como apontou Duval há pouco; entretanto, a valorização do caráter lógico e a desconsideração da dimensão epistêmica das proposições proporcionam nefastas consequências, como, por exemplo, a apontada por Mariani (2006, p. 203), quando em sua conclusão observa que o registro da língua natural ainda nos permitiu constatar que os alunos possuem muitas dificuldades em relação ao rigor na elaboração de argumentações apresentadas e, algumas vezes, não atribuem o real significado às simbologias expressas nas argumentações (p. 203).

Em nosso caso, específico do Cálculo Diferencial Integral a Várias Variáveis, suspeitamos de que a situação identificada empiricamente no estudo de doutoramento desenvolvido por Mariani pode ser generalizada e dispõe de outros elementos complicadores, bastando observar algumas notações recorrentes num curso de Cálculo, tais como:

(iii) $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$; $\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$ (iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial(\partial x)}(x,y)$; $\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)]$; $f_{xy}(x_0,y_0)$; f_{xx}

As incompreensões, erros e inseguranças dos estudantes devem ser considerados no ensino de Cálculo. A mediação didática do professor não pode levar em consideração apenas os seus acertos, uma vez que os fracassos e incompreensões não surgem num cenário de modo isolado, pois possuem uma história anterior, relacionada aos hábitos de estudo da pessoa, com destaque para suas habilidades mentais em relacionar os conteúdos que já lhes são familiares com o novo saber desvelado pelo mestre. Duval (1999) reforça nossas colocações, ao manifestar uma preocupação semelhante, quando diz que para se estudar a complexidade da aprendizagem em Matemática, devemos levar em consideração os estudantes, e não apenas a complexidade dos conceitos ensinados. Porém, existem inúmeras formas de referenciar o que os estudantes fazem, fornecem suas explicações, obtém suas conclusões (p. 3, tradução nossa).

Os ensinamentos de Raymond Duval são frutíferos no ensino de vários ramos do conhecimento matemático, e encontram uma significação particular no Cálculo Diferencial e Integral, em virtude deste se destacar por um amplo e complexo sistema notacional que viabiliza o acesso de objetos conceituais ideais. A Teoria das Representações Semióticas tem sido empregada em inúmeros trabalhos de destaque, tanto no Brasil (CELESTINO, 2008) como no Exterior (HENRIQUES, 2006), entretanto, tal fundamentação ainda não faz parte de um componente do professor de Matemática em formação. Neste sentido, ela pode fornecer subsídios diferenciados para o professor, inclusive potencializar suas abordagens metodológicas (ALVES, 2012a; 2012b; 2012c).

Por fim, uma das habilidades cognitivas mais importantes na aprendizagem, segundo Duval (2006), que é a coordenação de representações semióticas, é desconsiderada, uma vez que o ambiente: lápis e papel provoca restrições intransponíveis e, consequentemente, aprendizagens limitadas, em virtude de não proporcionar a evolução de 'imagens mentais[4]' dos objetos conceituais do CVV.

[4] Lautrey & Chartier (1987) discutem o resultados das experimentações desenvolvidas por Jean Piaget com respeito à evolução de *imagens mentais*. Observam que para alguns psicólogos, *a imagem mental é um traço residual da percepção*. Tendo em vista que no ensino tradicional não conseguimos gerar representações dos objetos do CVV, consequentemente, não exploramos a percepção dos alunos. Deste modo, sem percepção, não podemos esperar a evolução de *imagens mentais*.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco, R. V. Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do Geogebra bo contexto do Cálculo a Várias Variáveis. In: **Anais da Conferência Latinoamericana de Geogebra**. Nº 1, Montevideo: Editora Universitária. 2012a. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php. Acessado em 10 de novembro de 2012.

ALVES, Francisco, R. V. Interpretação geométrica de definições e teoremas: o caso da Análise Real. In: **Anais da Conferência Latinoamericana de Geogebra**. Nº1, Montevideo: Editora Universitária. 2012b. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php. Acessado em 11 de novembro de 2012.

ALVES, Francisco, R. V. Uma engenharia didática para o ensino do Cálculo: o caso da identificação de pontos extremantes da função f(x,y). In: **Anais da X Conferência Argentina de Educación Matemática X CAREM**. Buenos Aires. 2012c. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php. Acessado em 12 de novembro de 2012.

ALVES, Francisco, R. V. **Insight:** descrição e possibilidades do seu uso no ensino do Cálculo. In: *Vydya Educação*. v. 32, nº 2, p. 149-161. 2012d. Disponível em: http://sites.unifra.br/vidya/Artigos/2012/Volume32n2/tabid/2198/Default.aspx. Acessado em 12 de novembro de 2012.

BUCK, R. C. (1965). **Advanced Calculus**, Second Edition, New York: McGraw-Hill Book Company.

CELESTINO. Marcos, Roberto. **Concepções sobre limite:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior (tese), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica da São Paulo. 2008.

CHANON, Sarah. **Calculus**. New York: Global Media, 2009.

DUVAL, Raymond. Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. In: **Educational Mathematics Studies**, England. v. 22, 233-261, 1991.

______. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, 5, 37-65, 1993.

______. **Sémiosis et Pensée Humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Paris: Peter Lang Editeur, 1995.

______. Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking, basic issues for the learning. In: **Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education – PME**. V. 1, Mexico: Editora Universitária, p. 452-478, 1999.

______. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: **Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education – PME**. V. 1, Hiroshima: University of Hiroshima. p. 452-478, 2000.

______. A cognitive analysis of problems of comprehension in a Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**. England. v. 61, p. 103-131, 2006.

ERNEST, Paul. **The Philosophy of Mathematics Education**. London: Palmer Press, 1991.

GRABINER, Judith. **Who gave you the epsilon?** New York: Mathematical Association of America, 2009.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo**. Vol.2, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1986.

HENRIQUES, A. **L´enseignement et l´apprentissage des integrales multiples:** analyse didactique integrant l´usage du logiciel Maple (Thèse de Doctorat en Didactiques de Mathematiques). Grenoble: Université Joseph Fourier, IMAG, 320p, 2006.

KARRAER, Mônica. **Articulações entre Álgebra Linear e Geometria:** um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica, 2006. 344f. (tese). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica da São Paulo, 2006.

KAPLAN, Wilfred. **Advanced Calculus**. New York: Addison-Wesley Publishing Company. 1993.

KLINE, Morris. **Mathematics in the Western Culture**. London: Oxford University Press, 1964.

LARSON, R. E. **Cálculo y Geometria Analítica**. Sexta editión, Volume 2, Nueva York: McGrall-Hill. 1998.

LAUTREY, Jacques. & CHARTIER, Daniel. Images Mentales de transformations et opérations cognitives: une revue critique des études développementales. In: **L´Anée Psychologique**, v. 87, p. 581-602. 1987.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 2, São Paulo: HARBRA, 2ª edição. 1982.

MARIANI. Rita de Cássia. **Transição da Educação Básica para o ensino Superior:** a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo, 2006. 259f. (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2006.

POINCARÉ, H. Les Mathematiques et la Logique. In: **Revue de la Méthaphyique et da Morale.** Paris. v.1, p. 815-835. 1906.

SAURIAU. Paul. **Théorie de L´invention**. Paris: Félix Alcan. 1881.

STEWART, J. **Cálculo**, vol. II, 4ª edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning. 2004.

SWOKOWSKI. Earl, W. **Calculus with Analytic Geometry**. Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt, Vol. I. e Vol. II. 1979.

Recebido em 17/03/2011.
Aceito em 06/03/2012.