INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD (IMO) E SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS: UMA ABORDAGEM PARA O ESTUDO DOS TRIÃNGULOS COM ARRIMO DO GEOGEBRA

[1]Joelma Alves Rodrigues, [1]Francisco Régis Vieira Alves, [2]Renata Teófilo de Sousa

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), [2]Secretaria de Educação do Estado do Ceará

<joelmaalvesrodrigues2020@gmail.com>, <fregis@ifce.edu.br>
<rtsnaty@gmail.com>
DOI: 10.21439/conexoes.v18i0.3491

Resumo. As Olimpíadas de Matemática, apesar de terem se tornado mais populares nos últimos anos, não alcançam grande parte dos estudantes e professores de matemática, que por sua vez consideram tais testes com um nível de dificuldade muito elevado. Assim, o objetivo deste trabalho é propor uma abordagem para a resolução de questões de nível olímpico com o uso da tecnologia, que neste caso é o *software* GeoGebra. Para resolver questões olímpicas, o estudante precisa de criatividade e autonomia, ao passo que desenvolve o conhecimento com base em suas experiências e conhecimentos prévios. Nesse sentido, estruturou-se uma proposta de ensino amparada na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que tem como foco a preparação de um ambiente por meio de situações fundamentais, para que o estudante, estando no centro do processo de ensino e aprendizagem, seja capaz de investigar e se apropriar do conhecimento. O software GeoGebra entrou como recurso para construir, visualizar e manipular elementos, bem como para potencializar as investigações, provas e demonstrações matemáticas requeridas neste nível de questão. A metodologia adotada foi a pesquisa básica e exploratória, dado o caráter de pesquisa em fase experimental. Como resultado parcial, estruturou-se uma situação didática voltada para o Ensino de Geometria em nível olímpico, amparada na TSD e no conceito de Situação Didática Olímpica (SDO), proposto por Alves (2020), que preconiza as dialéticas da TSD associadas a um ambiente de aprendizagem voltado para a exploração de problemas olímpicos.

Palavras-chave: teoria das situações didáticas; situação didática olímpica; olimpíadas de matemática; GeoGebra.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD (IMO) AND OLYMPIC DIDACTIC SITUATIONS (ODS): AN APPROACH TO THE STUDY OF TRIANGLES WITH SUPPORT FROM GEOGEBRA

Abstract. The Mathematics Olympiads, despite becoming more popular in recent years, do not reach a large portion of students and mathematics teachers who often consider such tests to be of a very high difficulty level. Therefore, the objective of this study is to propose an approach for solving Olympic-level questions using technology, specifically the GeoGebra software. To tackle Olympic questions, students need creativity and autonomy, as they develop knowledge based on their experiences and prior knowledge. In this regard, a teaching proposal was structured based on the Theory of Didactic Situations (TDS), focusing on preparing an environment through fundamental situations. The aim is to place the student at the center of the teaching and learning process, enabling them to investigate and appropriate knowledge. The GeoGebra software serves as a tool for constructing, visualizing, and manipulating elements, enhancing investigations, proofs, and mathematical demonstrations required at this level of questioning. The adopted methodology was basic and exploratory research, given the experimental nature of the study. As a partial result, a didactic situation was structured for Olympic-level Geometry Teaching, supported by TDS and the concept of Olympic Didactic Situation (ODS), proposed by Alves (2020). ODS advocates for the dialectics of TDS associated with a learning environment focused on exploring Olympic problems.

Keywords: theory of didactic situations; olympic didactic situation; mathematics olympiads; GeoGebra.

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é importante na formação integral dos estudantes, isto é, nos saberes intelectuais e profissionais, que ajudam no desenvolvimento do raciocínio indispensável em situações encontradas no cotidiano (Souza; Castro; Barreto, 2020). Essa disciplina requer um grau de raciocínio por parte dos alunos, que por diversos fatores não consegue ser alcançado. Isso é comprovado nos resultados das avaliações externas, como Programa Internacional de Avaliação de Estudante – *PISA For Schools* (Brasil, 2019), considerada como uma das avaliações externas mais importantes do mundo (Silva; Alves; Menezes, 2021).

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada, a partir de documentos oficiais, como relatórios de Secretarias de Educação e Programas de Capacitação de Professores, aponta que há grandes lacunas na formação docente com base em seus participantes a nível nacional, o que reflete na qualidade do ensino de Matemática do país (IMPA, 2019).

O trabalho do professor de matemática voltado para questões de nível olímpico tem crescido ainda timidamente no país, possivelmente devido a algumas destas lacunas na formação do professor, bem como por questões culturais. É comum a visão de que questões em nível olímpico são muito difíceis, o que segrega a opinião de professores sobre seu uso em sala de aula e o quanto seria difícil implementar com todos os estudantes (Alves, 2020; Alves, 2021; Bragança, 2013).

Diante do exposto, este trabalho foi originado a partir de uma pesquisa de mestrado, em que se propõe explorar a abordagem matemática presente questões de olimpíadas, no intuito de ampliar o leque de possibilidades metodológicas do docente, bem como estimular o potencial interesse de alunos para o estudo desta disciplina.

As competições olímpicas apresentam problemas instigantes e desafiadores "[...] problemas que vão desde questões que necessitam de ferramentas básicas de matemática, criatividade, imaginação com um apelo à qualidade de raciocínio, até questões com alto grau de formalismo matemático" (Bragança, 2013, p. 7), o que pode torná-las atrativas para os participantes, estimulando-os individual ou coletivamente e, por consequência, ocasionando a evolução do conhecimento matemático da turma.

Em face da necessidade de estimular o estudante e torná-lo autônomo e protagonista de sua própria aprendizagem, estruturou-se uma proposta de ensino com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2008), na perspectiva trazida por (Alves, 2020), acerca do conceito de Situação Didática Olímpica (SDO). A TSD preconiza a criação de um meio (*milieu*) pelo docente, para que sob certas condições o aluno se adapte, investigue e se aproprie do conhecimento. Em face disto, a SDO traz a proposta da TSD voltada para problemas característicos de olimpíadas, os denominados Problemas Olímpicos (PO) Alves (2020), em particular da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). O objeto matemático escolhido foi o estudo dos triângulos, dada a sua recorrência em provas desta natureza, mesmo em diferentes níveis escolares.

Como forma de explorar o potencial matemático dos estudantes, sua habilidade em demonstrar, provar e argumentar, traz-se o *software* GeoGebra como recurso para modelizar as Situações Didáticas Olímpicas. O GeoGebra permite a interface entre Álgebra e Geometria de forma dinâmica, possibilitando a criação, manipulação e visualização em 2D e 3D (Sousa; Santiago; Alves, 2022), o que pode facilitar o envolvimento dos estudantes com a matemática e, por consequência, melhorar o aprendizado da disciplina e o interesse em participar de olimpíadas.

Nesse sentido, a pesquisa partiu do seguinte questionamento: é possível estruturar um método que viabilize a aprendizagem matemática no contexto de problemas olímpicos, contando com o apoio da tecnologia?

Diante deste questionamento, o objetivo do presente trabalho é propor uma abordagem para a resolução de questões de nível olímpico com o uso do GeoGebra, voltadas para o Ensino de Geometria (triângulos) e sua álgebra em nível olímpico.

A metodologia deste estudo foi a pesquisa básica (ou fundamental), de natureza exploratória (Gil, 2008). Este método foi adotado dada a sua característica de pesquisa que busca ampliar o conhecimento sobre determinado tema, ao discutir/responder perguntas científicas relevantes, sem necessariamente uma aplicação. Nessa perspectiva, a pesquisa básica busca fornecer propostas e um aporte teórico para o aprofundamento de pesquisas futuras, possibilitando a disseminação, o debate e a consolidação do conhecimento científico.

Desta forma, organizou-se uma SDO que visa a possibilidade da abordagem de problemas de olimpíadas com apoio da tecnologia, como forma de amparar a metodologia docente e angariar estudantes interessados no conhecimento matemático.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Teoria das situações didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), oriunda dos estudos em didática da Matemática francesa e concebida por Guy Brousseau, possibilita a compreensão de fenômenos intrínsecos ao processo de aprendizagem em sala de aula, possibilitando uma análise da tríade que compõe o processo didático - o professor, o aluno e o saber (Brousseau, 1986; Brousseau, 2008).

Dessa forma, a TSD propõe a elaboração de uma situação fundamental, criada pelo docente de forma estratégica, para estimular o aluno a se desenvolver a partir da concepção de hipóteses e conjecturas, construindo o conhecimento de forma autônoma, enquanto o professor assume o papel de mediador neste processo (Brousseau, 2008). Assim, como propõem Sousa, Alves e Souza (2023, p. 292):

> [...] a autonomia do aluno é desenvolvida por meio da tomada de decisões, da reflexão, da organização de ideias e estratégias com base em seus conhecimentos prévios, desde que o milieu seja elaborado pelo professor de modo a produzir tais desequilíbrios e sua consequente busca pela compreensão e apreensão do conhecimento. (Sousa; Alves; Souza, 2023, p. 292).

O *milieu* deve ser um ambiente criado pelo docente com situações de dificuldades, contradições e desequilíbrios, onde a adaptação do aluno culmina na aprendizagem de determinado objeto de ensino (Almouloud, 2007; Brousseau, 1986). Para isto, deve-se compreender que o estímulo à aprendizagem do aluno, segundo os pressupostos da TSD, ocorre em momentos ou dialéticas, que não necessariamente acontecem de modo disjunto, mas que culminam na construção do conhecimento pelo aluno de forma autônoma. Tais dialéticas são nominadas por Brousseau (2008) como situação de ação, formulação, validação e institucionalização, em que as três primeiras compõem o que o autor nomina por fase *adidática* (Brousseau, 1986). A fase *adidática* é o momento em que o aluno interage com a situação sem intervenção direta do docente (Brousseau, 1986; Brousseau, 2008).

Almouloud (2007, p. 34) pondera que as situações adidáticas são “situações nas quais a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a estes, condições favoráveis para a apropriação do novo saber”. Assim, o professor enquanto mediador acompanha o andamento da situação, com poucas interferências, dando autonomia para que os alunos criem hipóteses acerca do conhecimento matemático em jogo, seja de forma individual ou em grupo.

Na institucionalização, o professor participa de modo mais ativo, consolidando e validando os resultados apresentados pelos alunos, bem como corrigindo alguns obstáculos que possam ter sido encontrados na fase adidática. No entanto, desta vez com linguagem formal, ocorre de fato a institucionalização do saber matemático (Almouloud, 2007). Assim, a intenção do professor é revelada e os procedimentos matemáticos são verificados, formalizados e generalizados.

2.2 O conceito de situação didática olímpica

As questões oriundas de provas de olimpíadas, de modo geral, requerem do estudante atenção, criatividade, capacidade estratégica e uma base de conhecimento mais elaborada acerca dos tópicos abordados. Assim, é importante que ele tenha habilidades de interpretação e compreensão de problemas, além de concentração e habilidade matemática. Esse tipo de problema é denominado por Alves (2021, p. 125) com o termo Problema Olímpico (PO) e caracterizado pelo autor como:

> [...] um conjunto de situações-problema de Matemática, abordados em um contexto competitivo ou de maratonas, com a participação apenas (e de modo restritivo) dos estudantes competidores, cuja abordagem e características de ação individual e solitária destes envolve apenas objetivo/escopo de se atingir as metas (medalhas e certificados) definidas a priori em cada competição por intermédio do emprego de estratégias especializadas, raciocínios e argumentos matemáticos eficientes, instrumentalizados previamente por professores de Matemática. (Alves, 2021, p. 125).

A partir do conceito de PO e das dialéticas da TSD, Alves (2021), Alves (2020) concebe o termo *Situação Didática Olímpica* (SDO), definido pelo autor como situações de ensino estruturadas para a resolução de problemas olímpicos, seguindo as fases dialéticas de Brousseau (2008), presentes na TSD. Assim, o autor caracteriza uma SDO a partir da equação característica:

Partindo do conceito de situação didática (Brousseau, 2008), o autor propõe a nomenclatura de SDO a partir da adaptação da TSD para o contexto olímpico que, por sua vez, também preconiza o desenvolvimento da autonomia do aluno, colocando-o no centro do processo de aprendizagem. Neste caso, entende-se que a evolução da aprendizagem matemática do aluno, a partir do milieu criado pelo professor, pode ser verificada a partir de sua desenvoltura na resolução de problemas olímpicos. (Santos; Alves, 2018, p. 285) explicam, de modo mais detalhado, que uma SDO é composta por:

> Um conjunto de relações estabelecidas implicitamente ou explicitamente, entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (compreendendo ainda o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos de um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição e problemas ou um conjunto de problemas característicos das olimpíadas (Santos; Alves, 2018, p. 285).

Quadro 1: Estrutura lógica de uma SDO.

SDO = PO + TSD
Sendo:
SDO = Situação Didática Olímpica
PO = Problema Olímpico
TSD = Teoria das Situações Didáticas

Fonte: Adaptado de Alves (2020).

Nesse sentido, entende-se que o professor, enquanto mediador da SDO, planeja as situações buscando prever os possíveis comportamentos dos alunos, com base em seu conhecimento acerca da resolução deste tipo de problema. No percurso, o docente estrutura um *milieu* que busca suscitar os conhecimentos prévios dos alunos e, a partir deles e da sua interação com o próprio *milieu*, o problema olímpico e os seus pares (outros alunos), os alunos busquem a solução de forma autônoma, gerando um ambiente de fértil discussão e avanço no raciocínio matemático.

Alves (2021) salienta que o uso de SDOs como metodologia de ensino proporciona ao ambiente da sala de aula situações particulares de exercícios associados à análise matemática que ocorre em preparações para competições olímpicas.

No contexto desse trabalho, uma SDO foi estruturada a partir de um problema olímpico da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês), tendo o *software* GeoGebra como ferramenta para a sua construção, manipulação e visualização de características e propriedades algébricas e geométricas, inerentes a este tipo de problema.

2.3 O uso do GeoGebra na concepção de situações didáticas olímpicas

Muitos pesquisadores trazem o uso da SDO associada ao GeoGebra, como os trabalhos de Santos e Alves (2018), Lima, Azevedo e Alves (2020), Neto (2020), Santiago, Alves e Maia (2021), Silva, Alves e Menezes (2021), Alves (2021). O ponto em comum de todas estas pesquisas é o uso da SDO no contexto olímpico associada ao GeoGebra, mas diferenciando-se desta pesquisa por adotarem majoritariamente as situações da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Dentre estes trabalhos, apenas Santiago, Alves e Maia (2021) abordam a IMO e com um estudo generalizado de Geometria Plana, que aborda outras características para além do estudo de propriedades dos triângulos, como neste trabalho.

Santos e Alves (2018) trazem uma experiência no desenvolvimento da TSD para o ensino de Olimpíadas de Matemática, apresentando uma aplicação do Teorema de Pitot. Os autores apontam que a SDO fornece uma alternativa para aulas direcionadas às olimpíadas de matemática, descrevendo elementos para a mediação didática durante o processo de ensino e aprendizagem, e enfatizam pormenores que possibilitam controlar/prever as ações dos estudantes em propostas de ensino nessa perspectiva. Também assinalam a importância do GeoGebra ao proporcionar um sentido mais significativo para o estudo da geometria no contexto olímpico.

O trabalho de Alves (2021) busca, a partir da TSD e sua associação com a tecnologia, estruturar e descrever SDOs objetivando incentivar a mobilização de raciocínios diferenciados, apoiados em heurísticas e estratégias que, conforme o autor, permanecem restritas aos contexto de preparação específica para competições matemáticas olímpicas.

O trabalho de Lima, Azevedo e Alves (2020) aborda o tema de sequências numéricas no contexto das SDOs com o uso do GeoGebra e itens da OBMEP, buscando oferecer propostas metodológicas aos professores do Ensino Médio para o ensino do tema.

Neto (2020) segue uma perspectiva similar, ao trazer a sua proposta para o Ensino Fundamental, no estudo de itens da OBMEP voltados para o ensino de quadriláteros e suas propriedades na perspectiva da SDO associada ao GeoGebra.

Santiago, Alves e Maia (2021) realizaram uma Engenharia Didática na estruturação de uma SDO, com ênfase no ensino de Geometria Plana e com o apoio do GeoGebra como com o propósito de proporcionar a compreensão de novas resoluções aos alunos por meio dos comandos e visualização das figuras no software, aprofundando teoremas de Geometria Plana Geral.

Silva, Alves e Menezes (2021) seguem na mesma perspectiva de Neto (2020), propondo itens de Geometria Plana oriundos da OBMEP Nível 2, direcionado ao ensino fundamental, orientados pelos pressupostos da TSD e a noção de SDO com aporte do GeoGebra.

O uso de programas computacionais pode ser considerado essencial no desenvolvimento cognitivo do estudante, pois permite que o aluno se adapte em diferentes ritmos de aprendizagem, explorando os erros cometidos pelos mesmos, estimulando a construção do conhecimento (Gladcheff; Zuffi; Silva, 2001). No âmbito da matemática, o trabalho com *softwares* de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra tem grande potencial para alavancar a compreensão matemática do estudante, além de ser um recurso de grande valia para a metodologia do professor (Sousa; Santiago; Alves, 2022; Alves, 2020; Alves, 2021; Santiago, 2021) e nesse sentido, seu uso foi de valor primordial para a construção da SDO proposta neste trabalho.

Ainda sobre o GeoGebra, Sousa, Santiago e Alves (2022, p. 38) apontam que "O programa possui diversos recursos que permitem trabalhar com a geometria e outros conteúdos da Matemática". Nesta perspectiva, Laborde e Capponi (1994) enfatizam dois aspectos importantes ligados ao GeoGebra:

(a) A possibilidade de representação semiótica como figura dinâmica, sendo esta construída com base em comandos iniciais dentro do ambiente do *software*, o que gera a representação geométrica e algébrica do problema;

(b) A relação semiótica fornecida a partir da própria relação funcional inerente aos objetos geométricos. Por exemplo: a relação entre os segmentos de uma figura e sua visão 3D - dado um segmento possível de enxergar, ele pode ser um facilitador para a resolução da questão.

Entende-se que em suas construções o GeoGebra reúne a Álgebra, Geometria e Cálculo. Logo, é um programa que pode ser usado para o ensino de matemática em qualquer nível escolar (Alves; Barros, 2019). Existem vários estudos e experiências pedagógicas com este programa e, em particular, contou-se com o apoio de algumas pesquisas já realizadas em relação à construção de PO no GeoGebra, mencionadas no início desta subseção, que trazem as propostas de ensino com essa ferramenta.

O GeoGebra, ao ser utilizado na concepção de uma SDO, permite a modelização do problema e sua transposição para o ensino, em que o aluno tem a possibilidade de relacionar os elementos encontrados na situação alcançando um entendimento que o permite construir conceitos matemáticos (Santos; Alves, 2018; Alves, 2019). Logo, ao utilizar este *software*, o professor produz um modelo de construção e um ambiente interativo para o desenvolvimento da SDO (Santiago; Alves, 2021).

Assim, nosso intuito com o uso do GeoGebra na concepção de uma SDO é abordar a Geometria e a Álgebra em uma perspectiva de visualização simultânea para a compreensão de POs em matemática, o que traz um diferencial com relação às metodologias de ensino ditas como tradicionais.

Segundo Silva, Alves e Menezes (2020), há a possibilidade de, com o uso do GeoGebra associado às SDOs, alcançar um maior número de alunos, criando um ambiente dinâmico para as práticas de ensino de Matemática. Ou seja, pode-se construir um ambiente dinâmico para que o aluno construa o saber em torno das suas ações, formulando conjecturas e validando-as com o auxílio da tecnologia.

3 METODOLOGIA

Este trabalho tomou por base a obra de Gil (2008), em que se adotou uma metodologia de pesquisa básica, com abordagem qualitativa do tipo exploratória, dado seu caráter de pesquisa em andamento durante o curso de mestrado. Contudo, vale destacar que se pretende dar continuidade a esse estudo, coletando dados e realizando a análise e validação das hipóteses levantadas.

Dadas as dificuldades dos docentes na incorporação de problemas olímpicos na sala de aula, buscamos estruturar a SDO com apoio do GeoGebra. Nessa perspectiva, traz-se uma proposta didática de ensino, em que destacamos a Geometria Plana, de modo específico o conteúdo de triângulos e suas características gerais, a partir de uma abordagem visual, em que se busca construir um ambiente com as condições ditas minimamente ideais de visualização e manipulação.

O campo da Geometria foi escolhido por ser considerado de difícil assimilação pelos alunos (Sousa *et al.*, 2021), bem como ser considerado complexo o seu ensino pelos professores (Sousa; Santiago; Alves, 2022). No que tange à escolha do objeto "triângulo", esta ocorreu dada a sua recorrência em provas de competições olímpicas e presença no currículo ao longo de toda a Educação Básica.

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês) é a competição internacional mais antiga dentre as olimpíadas e considerada a mais importante. Cerca de cem (100) países ao redor do mundo participam deste certame (International Mathematical Olympiad, 2023), podendo ser representados por pequenos grupos de até seis (6) alunos do ensino médio ou egressos, mas que não tenham ingressado na Universidade na data da Olimpíada.

Os problemas abordados na prova são oriundos de diversas áreas da matemática pertencentes ao currículo escolar do Ensino Médio. Entretanto, para encontrar as soluções destes problemas, é necessário ter habilidade e conhecimento matemático de alto nível por parte dos competidores (Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento, 2019).

Dito isto, direcionou-se este trabalho para o professor de matemática, como forma de contributo à sua metodologia de ensino, reforçando a possibilidade de incorporação deste tipo de abordagem ao currículo, de forma paralela ao que se propõe nos modelos de questões trazidas pelos livros didáticos. Propõe-se que este modelo seja empregado com alunos do Ensino Médio, como forma de estimulá-los a participar de olimpíadas, além de ter ciência da existência da IMO. Também propõe-se que a atividade seja trabalhada em pequenos grupos, como duplas ou trios, como forma de viabilizar a etapa de formulação da TSD, motivando-os pela curiosidade e promovendo um ambiente de discussão frutífero.

O PO selecionado para a construção da SDO foi retirado da prova da (IMO, 2009). Trata-se do segundo problema proposto na prova do referido ano. O PO propõe que o aluno/competidor demonstre que dois segmentos são iguais, sendo necessário a este ter conhecimentos prévios como: (i) conhecer as propriedades e os elementos de um triângulo; (ii) identificar os conceitos de circunferência, circuncentro, pontos interiores, ponto médio, mediatriz e reta tangente. Assim, o objetivo do PO é utilizar tais propriedades e elementos para demonstrar que dois segmentos são iguais.

Na seção seguinte descrevemos a SDO elaborada com base nas dialéticas da TSD, constatando algumas competências e habilidades fundamentais para resolvê-la e demonstrando sua solução com o apoio do *software* GeoGebra.

4 DESENVOLVIMENTO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA

No Quadro 2 temos a SDO proposta:

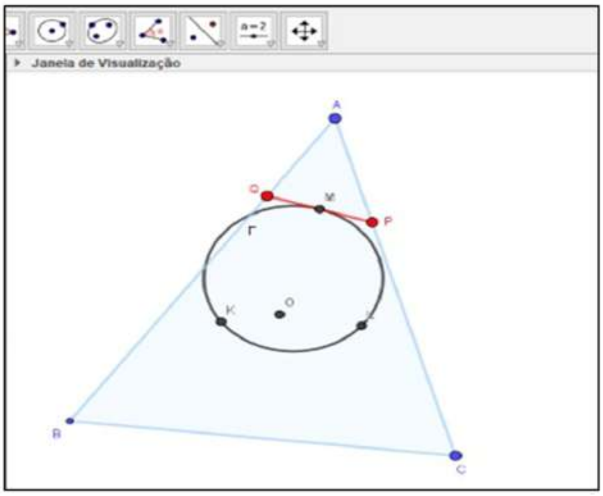
Quadro 2: Quadro 2: SDO proposta

Problema 2. Seja ABC um triângulo cujo circuncentro é O. Sejam P e Q pontos interiores dos lados CA e AB, respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e Γ a circunferência que passa por K, L e M. Suponha que a reta PQ é tangente à circunferência Γ. Demonstre que $OP = OQ$.

Fonte: IMO (2009).

A partir deste ponto, descreve-se uma possibilidade desta SDO com base no percurso das dialéticas da Teoria das Situações Didáticas, realizando uma previsão de possíveis comportamentos e/ou ações dos alunos diante

Figura 1: Construção inicial da SDO no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

do problema, o que pode ser considerado pelo docente ao utilizar esta proposta de ensino.

Dialética de Ação: Na presente etapa, é fundamental que o aluno, a partir do primeiro contato com o enunciado do problema no GeoGebra (Figura 1), leia-o atentamente e busque elementos que venham a fundamentar seu percurso estratégico. Desse modo, espera-se que eles tenham uma noção prévia sobre o circuncentro de um triângulo, bem como a mediatriz de cada um de seus lados. Também é esperado que este saiba indicar a reta tangente e os pontos interiores informados na questão.

Observando a Figura 1, pode-se notar a importância do GeoGebra na visualização e, sobretudo na manipulação dos elementos dados inicialmente no enunciado do PO, o que fornece significado matemático ao problema e o associa à tecnologia no ensino, visando o aprendizado dos envolvidos.

Dialética de Formulação: Nessa etapa é esperado que os alunos troquem ideias e compartilhem saberes. É possível que eles iniciem explorando algumas propriedades matemáticas necessárias, sendo estas relacionadas à descrição dos pontos *K, L, M, B'* e *C'* e dos pontos médios dos segmentos *BP, CQ, PQ, CA* e *AB*, respectivamente (Figura 2):

Com efeito, é possível ampliar a relação de CA ∥ LM, obtendo-se $\angle LMP = \angle QPA$. Presumindo que o ponto K toca o segmento PQ no ponto M, é possível que os estudantes consigam chegar à igualdade: $\angle LMP = \angle LKM$. Assim, pode ser descrito o triângulo isósceles $\triangle KLM$ dentro da circunferência, conforme a Figura 3:

Dando continuidade, tem-se que $\angle QPA = \angle LKM$. Assim, para descrever os pontos médios de seus lados, é necessário que o aluno realize cada intersecção ao triângulo $\triangle ABC$. Do mesmo modo, AB || MK onde $\angle PQA = \angle KLM$. Logo, eles podem perceber que os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle MKL$ são semelhantes, pois:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB/2}{PC/2} = \frac{QB}{PC} \tag{1}$$

o que é mostrado como possibilidade ilustrada na Figura 4:

Dialética de Validação: a partir da compreensão apontada na etapa anterior, nesse momento espera-se que os alunos (todos ou parte deles, individualmente ou em pequenos grupos) apresentem argumentos convincentes para validar a resolução do problema, apresentando as estratégias utilizadas. Assim, espera-se que eles conversem entre si e analisem todas as informações.

Considerando os pontos correspondentes a $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, conforme a Figura 5, significa que a potência dos pontos P e Q em relação ao círculo do $\triangle ABC$ é igual. Portanto, isso prova que $OP = OQ$:

Dialética de Institucionalização: Nessa última, espera-se que o professor que conduziu a SDO entre em ação, retomando o controle da situação didática e contribuindo para a formalização do conhecimento matemático relacionado à construção da solução do problema.

Assim, espera-se que o professor consiga esclarecer as dúvidas dos alunos, descartar soluções inadequadas, justificando porque o são, bem como reunir tudo o que foi exposto e dialogado pelos estudantes com uma linguagem matemática formal, transformando o saber em conhecimento. Desta forma, como a questão envolve mais de um conhecimento prévio, uma possibilidade para este momento seria o professor explicar os assuntos abordados no problema utilizando a própria solução proposta pela IMO (2009), mas demonstrada de forma dinâmica com apoio do quadro branco e do GeoGebra. Um possível percurso seria:

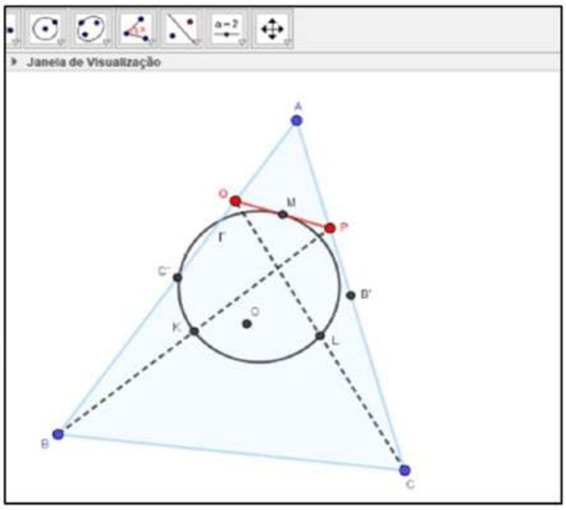
i. Explicar a condição de existência do triângulo $\triangle ABC$;

ii. Explicar como construir a circunferência Γ e o circuncentro .

iii. Em seguida, relembrar o conceito de ponto médio de um segmento, como o ponto que divide um segmento de reta em duas partes com medidas iguais.

iv Feito isso, determinamos os pontos médios dos segmentos BP, CQ, PQ, CA e AB.

Figura 2: Movimentos esperados na etapa da formulação, construindo os pontos médios dos segmentos *BP, CQ, PQ, CA* e *AB*.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

v. Reforçar o conceito de semelhança de triângulos, pois é condição essencial para se compreender e chegar à resolução do problema. Assim, o docente pode explicar que, por definição, dois triângulos são semelhantes se, e somente se, todos os lados forem proporcionais e seus ângulos internos forem congruentes.

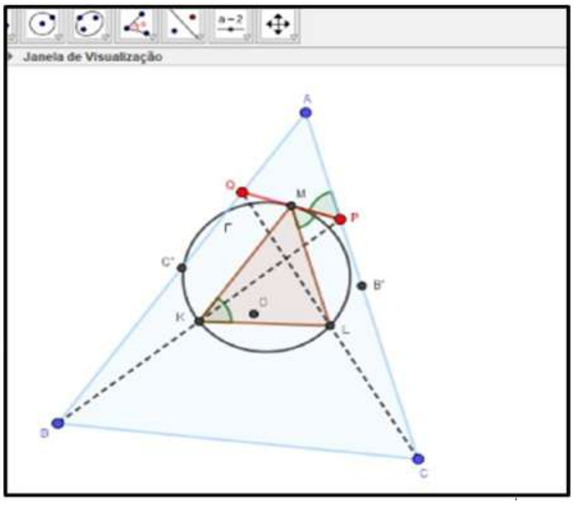
Por fim, em uma possível implementação dessa SDO pode-se investigar como foi a desenvoltura dos alunos com o uso do software e realizar reflexões apontadas para a utilização do GeoGebra no contexto do ensino de matemática voltado para olimpíadas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As Olimpíadas de Matemática tem se tornado mais presentes nas escolas públicas brasileiras, indicando um aumento na participação dos estudantes ao longo dos anos. Esse modelo de prova almeja ampliar a cultura matemática, aprimorar o pensamento criativo e o raciocínio lógico, além de identificar jovens talentos nesse campo do conhecimento. Nesse sentido, entendemos a importância do protagonismo do estudante no desenvolvimento de soluções de problemas, o que vem de encontro à proposta de Brousseau (2008), na Teoria das Situações Didáticas.

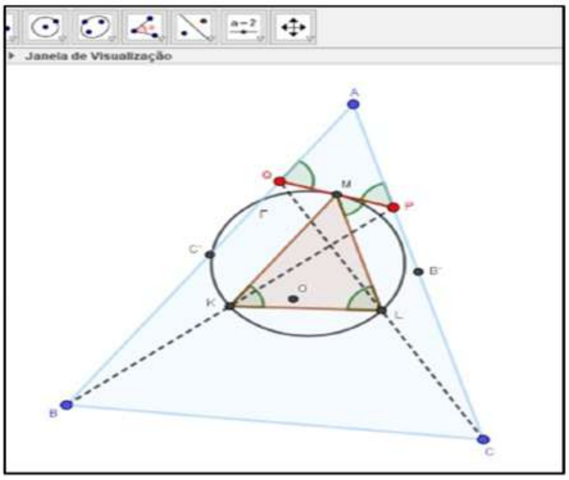
Nossa intenção com esta proposta foi mostrar ao docente uma maneira de estimular o pensamento geométrico do aluno ao visualizar propriedades geométricas em nível mais avançado com o aporte do GeoGebra,

Figura 3: Construção do triângulo isósceles $\triangle KLM$ e dos ângulos $\angle LMP$, $\angle QPA$ e $\angle LKM$.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Figura 4: Construção dos ângulos $\angle PQA$ e $\angle KLM$.



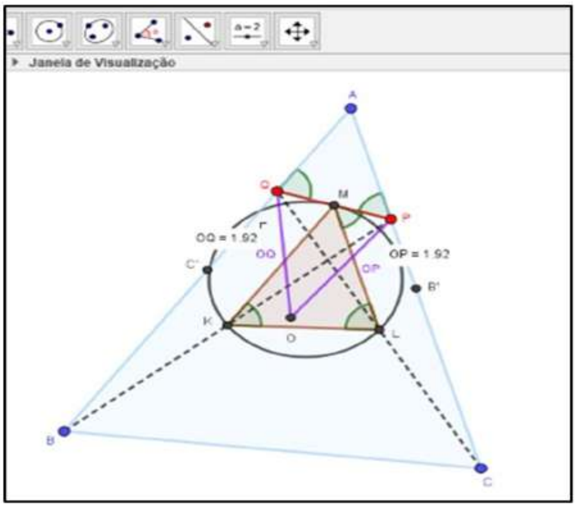
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

desenvolvendo assim competências e habilidades para resolver problemas como os contidos em olimpíadas como a IMO.

Neste trabalho estruturamos uma proposta para o ensino de questões oriundas de olimpíadas, embasado na Teoria das Situações didáticas, partindo do conceito de Situação Didática Olímpica (SDO), amparadas pelo *software* GeoGebra. A SDO estruturada é oriunda da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), por ser uma competição pouco difundida nas escolas brasileiras, sobretudo as escolas públicas.

A originalidade deste artigo reside na integração entre a *International Mathematical Olympiad* (IMO) e a

Figura 5: Demonstração de que os segmentos OP e OQ são iguais.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

noção de Situações Didáticas Olímpicas para o estudo das propriedades dos triângulos, utilizando o GeoGebra como ferramenta de apoio, o que se diferencia das demais pesquisas pelo tipo de olimpíada da qual a SDO foi extraída, bem como seu objeto matemático em estudo.

As dialéticas da TSD, sobretudo a fase adidática, a partir de um *milieu* previamente estruturado pelo professor, bem como o modelo de problema proposto em competições olímpicas, tem grande potencial para estimular os alunos a participar deste tipo de exame. E associá-lo ao uso do GeoGebra pode oferecer um ambiente propício ao desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas, até mesmo em alunos que tem mais dificuldades, haja vista que o GeoGebra fornece possibilidades de explorar o conhecimento algébrico-matemático em uma única *interface,* viabilizando a identificação de elementos, aprendizagem de conceitos e um possível despertar para o interesse em matemática.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, detectou-se como maior desafio a escolha e a construção da resolução do problema proposto no GeoGebra. Principalmente o PO retirado da prova da IMO, pois os acervos voltados para as olimpíadas internacionais são bem escassos. Buscou-se um tema que fosse relevante não apenas para o estudo de questões em nível olímpico, mas que também preconizasse um tópico relevante para o currículo escolar de modo geral.

Utilizando a proposta didática apresentada de uma forma dinâmica, propõe-se aos professores um caminho a ser percorrido no planejamento de sua prática. Contudo, ressalta-se que não é intenção deste trabalho questionar ou discutir os métodos e abordagens utilizadas pelos professores. O professor pode e deve seguir seu roteiro de aula como melhor desejar. O maior propósito aqui é ampliar a cultura de se estudar a matemática a partir do contexto de problemas olímpicos, desenvolvendo o protagonismo do aluno e seu raciocínio lógico-matemático. Espera-se, com isto, que este estilo de questão e de abordagem possa abrir um leque de possibilidades de ensino e de aprendizagem, constituindo-se ema forma de veicular a discussão de ideias matemáticas.

Em uma perspectiva futura pretende-se, após implementar esta situação didática em sala de aula e coletar dados, validar as hipóteses estabelecidas, bem como realizar uma correção de rotas no estudo e as melhorias que necessárias. Por fim, esperamos que esta proposta seja considerada um relevante contributo à práxis do professor de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. Visualizing the olympic didactical situation (ODS): Teaching mathematics with support of geogebra software. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 2, p. 97–116, 2019.

ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (SDOs): Ensino de olímpiadas de matemática com arrimo do software geogebra como recurso de visualização. **Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 13, n. 1, p. 319–349, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319.

ALVES, F. R. V. Situação didática olímpica (sdo): Aplicações das teoria das situações didáticas para o ensino de olímpiadas. **Revista Contexto & Educação**, v. 36, n. 113, p. 116–142, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.21527/2179-1309.2021.113.116-142.

ALVES, F. R. V.; BARROS, F. E. Plane and space figurate numbers: Visualization with the geogebra's help. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 1, p. 57–74, 2019.

BRAGANÇA, B. **Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar**. 107 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

BRASIL. **Relatório Brasil no PISA 2018**. Brasília, 2019. Disponível em: https://x.gd/If9nF. Acesso em: 7 jan. 2022.

BROUSSEAU, G. **Théorisation des Phénomènes D'Enseignement des Mathématiques**. Tese (Thèse d'État) — Université des Sciences et Technologies, L'Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GLADCHEFF, A. P.; ZUFFI, E. M.; SILVA, D. M. **Um instrumento para avaliação da qualidade de softwares educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental**. Fortaleza - CE, 2001.

IMO. **Olimpíada Internacional de Matemática**. 2009. https://www.obm.org.br/olimpiada-internacional-de-matematica/. Acesso em: 29 jun., 2023.

IMPA. **OBMEP 12 anos. Biênio 2017-2018**. Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: https://x.gd/1blVa. Acesso em: 07 jan. 2020.

International Mathematical Olympiad. **International Mathematical Olympiad**. 2023. https://www.imo-official.org.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Cabri-geometre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure. *In*: BALACHEFF, N.; VIVET, M. (Ed.). **Didactique et Intelligence Artificielle**. Grenoble: La Pensee Sauvage, 1994. p. 165–210.

LIMA, M. L. O.; AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas: uma proposta de ensino amparada com o geogebra. **Trilhas Pedagógicas**, v. 10, n. 12, p. 342–361, 2020.

NETO, J. E. O. **Situações Didáticas Olímpicas no contexto da OBMEP**. 2020. Seminário DoCEntes, SEDUC/CED. Disponível em: https://x.gd/dxkBW. Acesso em: 03 fev. 2024.

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento. **Olimpíada Internacional de Matemática**. 2019. https://noic.com.br/olimpiadas/matematica/imo/. Acesso em: 29 ago., 2023.

SANTIAGO, P. V. S. **Olimpíada Internacional de Matemática: Situações Didáticas Olímpicas no Ensino de Geometria Plana**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática)) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V. Situações didáticas na olimpíada internacional de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 6, p. 1–24, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.26843/rencima.v12n6a29.

SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V.; MAIA, B. M. P. Sobre a noção de situação didática olímpica aplicada ao contexto das olimpíadas internacionais de matemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 18, p. 1–19, 2021. Disponível em: http://doi.org/10.37001/remat25269062v18id533.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. Uma engenharia didática para o ensino de matemática olímpica: situações olímpicas com auxílio do software geogebra. **Góndola, Ensenãnza y Aprendizaje de las Ciencias**, v. 13, n. 1, p. 141–154, 2018. Disponível em: http://doi.org/10.14483/23464712.11732.

SILVA, J. G. A.; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Aspectos da teoria das situações didáticas aplicada ao ensino de geometria plana referente a problemas das olimpíadas de matemática com amparo do software geogebra. **ReviSeM**, v. 5, n. 2, p. 328–342, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.34179/revisem.v5i2.13325.

SILVA, J. G. A. da; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Situação didática olímpica - sdo: um problema olímpico aplicado à teoria das situações didáticas. **Revista Thema**, v. 19, n. 2, p. 265–278, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.15536/thema.V19.2021.265-278.1725.

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A. Categorias do raciocínio intuitivo e teoria das situações didáticas: uma perspectiva sobre a intuição e o raciocínio matemático. **Revista de Estudios y Experiencias en Educación – REXE**, v. 22, n. 49, p. 284–302, 2023.

SOUSA, R. T.; AZEVEDO, I. F.; LIMA, F. D. S.; ALVES, F. R. V. Transposição didática com aporte do geogebra na passagem da geometria plana para a geometria espacial. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 7, n. 5, p. 106–124, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.51891/rease.v7i5.1177.

SOUSA, R. T.; SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V. Modelagem matematica em problemas da obmep: a visualizacao geometrica com aporte do software geogebra. **Revista Iberoamericana de Tecnologia en Educacion y Educacion en Tecnologia**, n. 32, p. 34–43, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.24215/18509959.32.e4.

SOUZA, D. C.; CASTRO, J. B.; BARRETO, A. L. O. Desempenho, representações e estratégias de estudantes do 5º ano do ensino fundamental, na resolução de situações de combinatória. **Vidya**, v. 40, n. 2, p. 397–416, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.37781/vidya.v40i2.3367.