CONEXÕES
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

EQUILÍBRIO DINÂMICO DE TRÊS CORPOS AUTOGRAVITANTES IDÊNTICOS NA APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

ALANA CAROLINA LIMA DOS SANTOS[1], CELIO RODRIGUES MUNIZ[1], LEONARDO TAVARES DE OLIVEIRA[1]

[1] Universidade Estadual do Ceará/Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu
<alana.santos@aluno.uece.br> <celio.muniz@uece.br> <leonardo.tavares@uece.br>

DOI: https://doi.org/10.21439/conexoes.v13i4.1850

Resumo. Estudamos o problema restrito de três corpos de massas idênticas situados nos vértices de um triângulo equilátero, interagindo entre si por meio da gravidade. Consideramos, inicialmente, que as massas estão sujeitas à atração gravitacional newtoniana. Mostramos que os corpos orbitam com velocidade angular constante em torno do centro de massa do sistema e que a terceira lei de Kepler se aplica. Em seguida, corrigimos a lei da gravitação acrescentando à força newtoniana um termo proporcional a $1/r^4$, o qual provém da Teoria da Relatividade Geral (TRG), na aproximação de campo fraco, também chamada de pós-newtoniana. Encontramos que a velocidade angular, para uma dada distância entre os corpos, é maior que a calculada para o caso newtoniano e que a terceira lei de Kepler não é mais obedecida. Calculamos também a distância crítica entre os corpos para a qual o sistema gira com uma velocidade linear igual à da luz. Constatamos que essa distância é menor que os respectivos raios de Schwarzschild, de modo que, em tal situação, uma análise mais acurada requer o uso das equações completas da TRG.

Palavras-chaves: Problema dos três corpos. Teoria da Relatividade Geral. Aproximação pós-newtoniana.

Abstract. We study the restricted problem of three bodies of identical masses located at the vertices of an equilateral triangle, interacting with one another through gravity. We consider, initially, that the masses are subject to the Newtonian gravitational pull. We show that the bodies orbit with constant angular velocity around the center of mass of the system and that Kepler's third law applies to it. Next, we correct the gravitation law by adding to the Newtonian force a term proportional to $1/r^4$, which comes from the General Relativity Theory (GRT), in the weak-field approximation, also called post-Newtonian. We find that the angular velocity, for a given distance between the bodies, is greater than that calculated for the Newtonian case and show that the Kepler's third law is no longer obeyed. We also calculate the critical distance between the bodies for which the system rotates with a linear velocity equal to that of light. We find that this distance is smaller than their Schwarzschild radii, so that a more accurate analysis requires the use of the complete equations of GRT.

Keywords: Problem of three bodies. Theory of General Relativity. Post-Newtonian approximation.

1 INTRODUÇÃO

Em 1687, na sua obra "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural", Isaac Newton resolveu o *problema dos dois corpos*, considerando, exclusivamente, a atração gravitacional entre ambos (NEWTON, 1687). Ao adicionar um corpo à configuração, obtemos o *problema dos três corpos*. Logo, solucioná-lo consiste em resolver as equações que representam o movimento dos três corpos, em um espaço tridimensional, considerando apenas a atração gravitacional mútua (MARTINS; ZANOTELLO, 2018). Contudo, o problema é classificado como não integrável, pois não existem métodos analíticos que expressem as trajetórias dos corpos (YAMADA, 2014). Inclusive, em 1890, Poincaré demonstrou que essa configuração torna-se insolúvel por qua-

Artigo submetido em 10 dez. 2019 e aceito em 22 dez. 2019

dratura (POINCARÉ, 1890).

No entanto, surgiram algumas situações restritas ou soluções de equilíbrio que permitem a abordagem do problema dos três corpos (YAMADA, 2014). Por volta de 1767, Euler descobriu três situações em que os corpos orbitam ao redor do seu centro de massa em Movimento Circular Uniforme (EULER, 1767). Por sua vez, em 1772, Lagrange apresentou uma solução específica para os corpos com massas iguais situados nos vértices de um triângulo equilátero (LAGRANGE, 1867). Há casos no sistema solar em que os corpos, no decorrer de seus movimentos, assumem uma configuração semelhante à de um triângulo equilátero como, por exemplo, o sistema Asteróides Troianos-Sol-Júpiter e o Lua Polydeuces-Saturno-Lua Dione (PINTO, 2006). Uma importante aproximação, conhecida como problema restrito dos três corpos, considera o sistema em que um dos corpos possui massa desprezível em relação aos outros dois que possuem massa finita (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001). Lagrange definiu cinco pontos $(L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$ e $L_5)$ que são soluções para essa configuração, chamados de pontos lagrangeanos ou estacionários (LAGRANGE, 1867).

Por outro lado, no início do século XX, a Física Clássica não conseguia explicar a radiação do corpo negro, bem como, algumas concepções do eletromagnetismo (HORVATH et al., 2011). Por isso, para explicar o fato de que a luz, enquanto onda eletromagnética poderia vagar pelo espaço, inclusive no vácuo, foi sugerida a existência do éter, um meio que preenchia o cosmo e que propagava os efeitos eletromagnéticos (WHITTAKER, 1989). Entretanto, o insucesso do experimento de Michelson-Morley, que visava comprovar a existência do éter, atrelado a uma série de outras experiências, culminaram por decretar o declínio do sistema Newtoniano (THORNTON; MARION, 2011). Em 1905, abandonando a ideia do éter, em paralelo aos trabalhos de Poincaré e Lorentz, Albert Einstein estabeleceu os postulados fundamentais da Teoria da Relatividade Especial: o princípio da relatividade e o postulado referente à constância da velocidade da luz (EINSTEIN, 1905). A relatividade especial contempla apenas referenciais inerciais. Estendendo a análise para referenciais acelerados, em 1916, Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral (EINSTEIN, 1916), que explica a atração gravitacional como um efeito resultante da curvatura do espaço-tempo, isto é, os corpos massivos distorcem a geometria do espaço circundante, de modo a que as partículas próximas sigam trajetórias geodésicas (EINSTEIN, 1999). O tempo é também "distorcido", na forma de atrasos nos relógios posicionados próximos às massas em relação aos situados em locais mais distantes.

A Teoria da Relatividade Geral, na aproximação de campo fraco, chamada também de pós-newtoniana, em que a distorção espaço-temporal é vista apenas como uma pequena modificação da geometria referente a um espaço-tempo "plano", considera que um dos efeitos resultantes em primeira ordem de aproximação é produzir uma correção na lei da força gravitacional formulada por Newton, adicionando-se um termo proporcional a $1/r^4$ (THORNTON; MARION, 2011). No caso do problema de dois corpos sob mútua atração gravitacional newtoniana, quando um deles segue uma órbita elíptica em torno do outro, ao se levar em conta a correção relativística, o eixo maior do que era uma elipse passa a rotacionar também em torno do centro atrator, de modo que a trajetória assume uma forma semelhante a de uma curva rosácea. É interessante mencionar aqui o teorema de Bertrand, que afirma que dois corpos atraindo-se mutuamente descreverão órbitas limitadas e fechadas apenas para uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância (gravidade newtoniana) ou proporcional à distância entre eles (como no oscilador harmônico tridimensional) (THORNTON; MARION, 2011). A força que descrevemos neste trabalho, com um termo perturbativo do tipo $1/r^4$, portanto, não se enquadra no referido teorema e a órbita é aberta, precessionando.

Nesse contexto, nosso trabalho objetiva analisar o problema do equilíbrio dinâmico de sistemas formados por três massas iguais, situadas nos vértices de um triângulo equilátero. Inicialmente, revemos o problema do ponto de vista da Gravitação Universal Newtoniana, considerando esta como a responsável pela atração mútua entre os corpos. Posteriormente, incluímos a correção referente à aproximação pós-newtoniana, decorrente da Teoria da Relatividade Geral. Calcularemos, assim, nos dois casos, a velocidade angular do sistema para a qual ocorre o equilíbrio dinâmico entre as massas, comparando-as entre si. No caso relativístico, uma distância crítica entre as massas também será obtida, para a qual a velocidade linear de rotação dos corpos torna-se igual à velocidade da luz. Uma discussão sobre a terceira lei de Kepler também é realizada.

É válido ressaltar que as dez equações de campo da Teoria da Relatividade Geral, as quais relacionam a geometria do espaço-tempo com o seu conteúdo de matéria e energia, são altamente não lineares, deixando de valer, no caso geral, o princípio de superposição. No entanto, tal princípio é utilizado neste trabalho, uma vez que na aproximação de campo fraco tais equações podem ser linearizadas, podendo ser inclusive escritas na forma das equações de Maxwell do Eletromagnetismo. (MASHHOON, 2007).

O trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2, analisamos o problema dos três corpos de massas iguais do ponto de vista newtoniano e pós-newtoniano; na Seção 3, os resultados são discutidos e na Seção 4, fechamos o artigo com as conclusões.

2 PROBLEMA DE TRÊS CORPOS IDÊNTICOS NOS VÉRTICES DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Um dos principais problemas estudados na mecânica celeste é determinar o equilíbrio dinâmico dos corpos quando estes interagem gravitacionalmente entre si. Issac Newton, o primeiro a formular o problema de n corpos em 1687, propôs uma configuração na qual os corpos são esferas perfeitas e a atração mútua ocorra como se toda a massa dos corpos estivessem concentrada em seu centro de massa. Para esses tipos de sistemas de n corpos, sujeitos apenas às ações das forças gravitacionais newtonianas, chama-se *problema newtoniano de n corpos.*

2.1 Abordagem Newtoniana

O problema newtoniano restrito de três corpos, solucionado por Joseph Lagrange em 1772 , consiste em três corpos nos vértices de um triângulo equilátero interagindo mutuamente por ação gravitacional (DANBY, 1992). Considere, inicialmente, três corpos de massas finitas $m_1,\ m_2$ e m_3 distribuidas nos vértices de um triângulo equilátero de lado r. Assim, pelas leis de Newton, as equações de movimento sobre cada um dos corpos são dadas por

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3}\mathbf{r}_{13}; \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{Gm_2m_1}{r_{21}^3}\mathbf{r}_{21} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3}\mathbf{r}_{23}; \\ m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 &= -\frac{Gm_3m_1}{r_{31}^3}\mathbf{r}_{31} - \frac{Gm_3m_2}{r_{32}^3}\mathbf{r}_{32}; \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\ddot{\mathbf{r}}_i$ é a aceleração do i-ésimo corpo em relação ao centro de massa do sistema, G é a constante gravitacional e $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ é o deslocamento relativo entre os corpos com $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Somando as equações (1), tem-se

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = 0, \tag{2}$$

ou seja, a resultante das forças internas (gravitacionais) é nula e, como não há forças externas, o centro de massa do sistema está em repouso ou desloca-se em linha reta com velocidade constante com relação ao referencial inercial considerado. Então, suponha que o centro de massa da configuração de partículas coincida com a origem do sistema de coordenadas. Além disso, como os corpos estão nos vértices do triângulo equilátero, então

$$r_{21} = r_{13} = r_{32} = r. \tag{3}$$

Consequentemente, por (2) e (3), a distância dos corpos em relação ao centro de massa do sistema deve ser

$$r_i = \frac{r}{M}\sqrt{m_j^2 + m_jm_k + m_k^2}, \tag{4}$$

na qual $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j \neq k$, e $M = (m_1 + m_2 + m_3)$.

As equações (1), (2) e (3) implicam que as resultantes das forças sobre cada uma das massas do sistema, são

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{GMm_i}{r^3}\mathbf{r}_i. \tag{5}$$

Em particular, quando se têm três corpos de mesma massa, m, nos vértices de um triângulo equilátero de lado r, as equações (4) e (5) devem ser reescritas, respectivamente, como

$$r_i = \frac{\sqrt{3}}{3}r, \tag{6}$$

ou seja, o centro de massa encontra-se no baricentro do triângulo, e

$$\mathbf{F}_N^{(i)} = -\sqrt{3}\frac{Gm^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_i, \tag{7}$$

onde $\mathbf{F}_N^{(i)}$ é a força newtoniana resultante sobre cada um dos corpos na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}_i$, conforme a Figura 1.

A partir da Equação (7), pode-se afirmar que esta força resultante tende a se igualar à força centrípeta para manter o equilíbrio dinâmico do movimento. Assim, a velocidade angular newtoniana da configuração de partículas em relação ao centro de massa do sistema, será

$$\omega = \sqrt{\frac{3Gm}{r^3}}. \tag{8}$$

Por fim, a partir da expressão (8), vale afirmar que o movimento orbital do sistema, formado por três corpos de massas iguais nos vértices de um triângulo equilátero, satisfaz a conhecida Terceira Lei de Kepler (NUSSENZVEIG, 2002), ou seja,

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{3Gm}, \tag{9}$$

onde T é período de rotação dos corpos.

Figura 1: Força newtoniana resultante no problema de três corpos idênticos nos vértices de um triângulo equilátero.

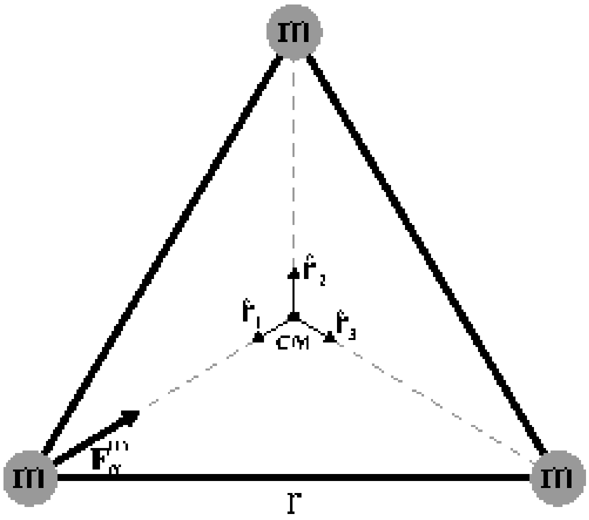
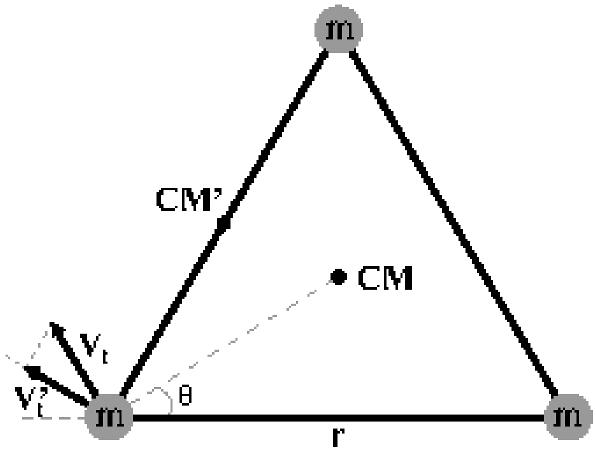


Figura 2: Momento angular do sistema de três corpos nos vértices do triângulo equilátero.



2.2 Aproximação Pós-newtoniana

Agora a interação entre os corpos devido a força gravitacional newtoniana, como visto na última seção acima, deverá ser modificada. Tal correção, que é uma das consequências da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, é efetivada ao ser incluído uma pequena termo na força proporcional a $1/r^4$, ou seja, a nova lei da força gravitacional sobre os corpos devem ser dadas pela força gravitacional newtoniana, somada a componente de correção relativística de intensidade dada por

$$F_{cr} = \frac{3GM}{mc^2}\frac{L^2}{d^4}, \tag{10}$$

onde, neste caso, M é a massa do corpo de maior massa, L é o momento angular do par de corpos em relação ao centro de massa formado por eles, d a distância entre os mesmos e c a velocidade da luz no vácuo (THORNTON; MARION, 2011).

Novamente, lembrando que nosso problema está restrito a três corpos de massas iguais nos vértices do triângulo equilátero de lado r, então a Equação (10) para este caso, é

$$F_{cr} = \frac{3G}{c^2}\frac{L^2}{r^4}. \tag{11}$$

Por outro lado, os momentos angulares no problema de três corpos idênticos nos vértices de um triângulo equilátero (Figura 2), são definidos como

$$l = \frac{1}{3}m\omega r^2, \tag{12}$$

representando o momento angular de cada corpo em relação ao centro de massa do sistema, CM, e

$$l' = \frac{1}{4}m\omega r^2, \tag{13}$$

é o momento angular dos corpos em relação ao centro de massa de cada par, CM'.

Como a correção relativística considera as interações aos pares e, conforme sua própria definição, a mesma é uma força central, então o momento angular é conservado (THORNTON; MARION, 2011). Assim, usando o momento angular dado por (13) em (11), e sabendo que a força de correção relativística é atrativa entre os corpos do sistema, então a resultante vetorial das forças de natureza relativística neste problema, são dadas pela seguinte forma

$$\mathbf{F}^{(i)}_{cr} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}\frac{Gm^2\omega^2}{c^2}\hat{\mathbf{r}}_i. \tag{14}$$

Com base nas equações (7) e (14), a força resultante na aproximação pós-newtoniana para cada um dos corpos, é dada pela expressão

$$\mathbf{F}^{(i)} = -\sqrt{3}Gm^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\omega^2}{16c^2}\right)\hat{\mathbf{r}}_i. \tag{15}$$

Se a força centrípeta e a força resultante na aproximação pós-newtoniana se igualam, então, por (15), a nova velocidade angular do sistema de partículas, é

$$\omega = \sqrt{\frac{3Gm}{r^3\left(1 - \frac{9Gm}{16rc^2}\right)}}, \tag{16}$$

mostrando que esta expressão não satisfaz a Terceira Lei de Kepler.

Artigo submetido em 10 dez. 2019 e aceito em 22 dez. 2019

Por outro lado, observa-se na Equação (16) que se $c \to \infty$, isto é, se estamos considerando apenas o formalismo newtoniano, então o ω será o mesmo da teoria newtoniana, como apresentado em (8).

Suponha agora que, numa situação limite, o sistema se desloca com velocidade linear igual à velocidade da luz, c. Por conseguinte, novamente por (16), o raio da trajetória descrita será chamado de raio crítico, e é escrito como

$$r_1 = \frac{25}{16}\frac{Gm}{c^2}. \tag{17}$$

Sendo este, aproximadamente, $1,5$ vezes maior que o raio crítico newtoniano, a saber

$$r_1^{(N)} = \frac{Gm}{c^2}. \tag{18}$$

Se cada um dos corpos em atração mútua for menor que o seu próprio raio de Schwarzschild, $r_S = 2Gm/c^2$, ou em outras palavras, se forem o que chamamos de *buracos negros*, o raio crítico será dado por

$$r_1 = \frac{25}{32} r_S. \tag{19}$$

Da expressão entre parênteses sob a raiz quadrada em (16), podemos inferir que há um segundo raio crítico,

$$r_2 = \frac{9}{32} r_S, \tag{20}$$

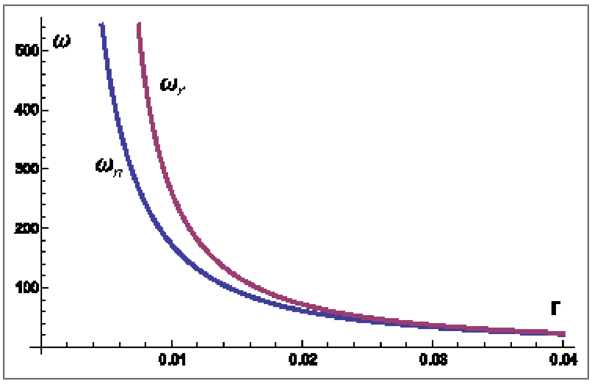
abaixo do qual a velocidade angular fica imaginária, mas como chega a ser menor que o raio crítico r_1, o qual por sua vez é menor que o raio de Schwarzschild, não teceremos nenhum comentário a respeito, visto não possuir qualquer significado físico.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Figura 3 representamos a velocidade angular do sistema de três corpos de massas iguais situados nos vértices de um triângulo equilátero, nos casos newtoniano e pós-newtoniano. Na resolução deste problema, consideramos apenas a aproximação de primeira ordem, isto é, não levamos em conta os efeitos gravitacionais devido às velocidades das massas - o chamado efeito gravitomagnético ou de Lense-Thirring (LENSE; THIRRING, 1918), que é muito pequeno.

Percebemos que, qualquer que seja a distância r entre as massas, a velocidade angular para o caso pós-newtoniano é maior que para o newtoniano. Isso é esperado, pois o termo que corrige a força newtoniana tem o mesmo sinal que esta, intensificando-a. Assim, o sistema precisa girar mais rapidamente para manter o equilíbrio dinâmico. Note também que, para grandes

Figura 3: Velocidade angular em função da distância entre as massas, para os casos relativístico, ω_r, e newtoniano, ω_n, em unidades tais que $G = c = 1$, com m =0,01.



valores de r, as velocidades angulares nos casos newtoniano e pós-newtoniano tendem a convergir.

Com relação ao raio crítico, r_1, a Equação (19) nos informa que este é menor que o raio de Schwarzschild pelo fator $25/32$. Isto significa que o sistema não atingirá a velocidade da luz, pois antes disso as massas, se tiverem um tamanho desprezível, alcançam uma distância mútua igual a este raio e o sistema colapsa, assim, em um único buraco negro. Cabe observar, entretanto, que em tal situação a aproximação pós-newtoniana não mais se aplica, pois os efeitos relativísticos tornam-se muito intensos e deve-se usar as equações da Relatividade Geral completas para se descrever de forma correta o sistema, inclusive levando-se em conta que este deve perder energia na forma de ondas gravitacionais.

Por fim, cabe assinalar que os sistemas estelares trinários são bastante comuns no Universo, embora aqueles de massas pelo menos com valores próximos entre si sejam muito raros. Assim, por exemplo, Alfa Centauri é o sistema estelar mais próximo do sistema solar, situado a cerca de 4,37 anos-luz de distância da Terra, e é constituído de três estrelas, duas de massas aproximadamente iguais às do Sol e a terceira (Próxima Centauri) com cerca de 10% desta (ASIMOV, 1981). Para descrever um sistema assim, vale a abordagem de outro problema restrito de três corpos, em que um dos corpos tem massa pequena comparada com a dos outros dois. É sabido que há solução para este problema, isto é, é possível encontrar a órbita seguida por cada um dos corpos isoladamente (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001). Isto será objeto de um próximo artigo, onde consideraremos também a aproximação pós-newtoniana.

4 CONCLUSÕES

Neste artigo, estudamos o problema restrito de três corpos de massas idênticas situados nos vértices de um triângulo equilátero, sofrendo atração mútua devida à interação gravitacional. Neste caso, mostramos que a solução para o problema é dada na forma de uma rotação constante do sistema em torno do seu centro de massa, estabelecendo assim um estado de equilíbrio dinâmico.

Consideramos, inicialmente, que as massas estão sujeitas à atração gravitacional newtoniana, a qual é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos. Mostramos que a terceira lei de Kepler aplica-se ao problema, isto é, o quadrado da distância entre os corpos é proporcional ao cubo do período de rotação orbital. Em seguida, corrigimos a lei da gravitação newtoniana por um termo proporcional a $1/r^4$ que advém da Teoria da Relatividade Geral, na aproximação de campo fraco, chamada de pós-newtoniana. Encontramos que a velocidade angular, para uma dada distância entre os corpos, é maior que no caso newtoniano, uma vez que a correção tem o mesmo sinal que a força de gravidade usual, de modo que ela intensifica a interação entre os corpos. Nesta situação, a terceira lei de Kepler não é mais obedecida, pois a relação entre o período de rotação e a distância entre os corpos torna-se mais complicada.

Calculamos também a distância crítica entre os corpos para a qual o sistema gira com uma velocidade linear igual à da luz. Todavia, constatamos que essa distância é menor que o raio de Schwarzschild, o que indica que os corpos entram em colapso, fundindo-se em um buraco negro, antes dessa velocidade ser atingida e se os corpos possuírem dimensões desprezíveis. Uma análise mais detalhada e precisa requer o uso das equações completas da Relatividade Geral, uma vez que o regime aí não é mais o de campo fraco, com a aproximação pós-newtoniana deixando de valer, portanto.

Como perspectivas futuras, pretendemos resolver o mesmo problema levando-se em conta o efeito de arraste dos referenciais causado pelo movimento das massas, contanto que as velocidades destas não sejam altas, comparáveis à velocidade da luz. Este efeito é chamado de gravitomagnetismo ou Lense-Thirring, e seria a próxima ordem de correção na aproximação pós-newtoniana. Nessa perspectiva, consideramos também investigar o outro problema restrito de três corpos, em que um destes tem massa desprezível em comparação aos outros dois, os quais podem ter massas diferentes, a exemplo de sistemas estelares binários orbitados por um planeta.

REFERÊNCIAS

ASIMOV, I. **Alpha Centauri**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1981.

DANBY, J. M. A. **Fundamentals of Celestial Mechanics**. North Carolina: Willmann-Bell, 1992. 266 p.

EINSTEIN, A. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. **Annalen der Physik**, n. 17, p. 891–921, 1905.

____. *Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. **Annalen der Physik**, n. 49, p. 769–822, 1916.

____. **A Teoria da Relatividade Especial e Geral**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.

EULER, L. **De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium**. [S.l.]: Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 1767. v. 11.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. ed. New York: Addison Wesley, 2001.

HORVATH, J. E. et al. **Cosmologia Física**. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 224 p.

LAGRANGE, J. L. **Oeuvres de Lagrange**. Paris: Gauthier-Villars, 1867. v. 6. 229 p.

LENSE, J.; THIRRING, H. Über den Einfuß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. Physikalische Zeitschrift, v. 19, 1918.

MARTINS, F. A. C.; ZANOTELLO, M. Mecânica celeste e a teoria dos sistemas dinâmicos: uma revisão do problema circular restrito de três corpos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 2, p. 01–11, 2018. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v40n2/1806-1117-rbef-40-02-e2310.pdf>.

MASHHOON, B. Gravitoelectromagnetism: A brief review. **arXiv:gr-qc/0311030v2**, p. 01–15, 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0311030v2.pdf>.

NEWTON, I. **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**. 3. ed. Londres: Royal Society e Typis Streater, 1687.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002. v. 1.

Artigo submetido em 10 dez. 2019 e aceito em 22 dez. 2019

PINTO, D. M. C. **Estabilidade do problema de três corpos restrito**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Escola de Ciências, Universidade do Minho, Azurém, 2006. 105 f. Disponível em: <https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/5542>.

POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. v. 13, 1890.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 276 p.

WHITTAKER, E. T. **A History of the Theories of Aether and Electricity**. New York: Dover Publications, 1989.

YAMADA, K. **Post-newtonian equilibrium solutions to the three-body problem in general relativity**. Tese (Doutorado em Ciência) — Universidade de Hirosaki, Hirosaki, 2014. 109 f. Disponível em: <https://hirosaki.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&page_id=13>.