

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

MARTIN MAKLER

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

<martinmakler@gmail.com>

DOI: 10.21439/conexoes.v13i2.1679

Resumo. O efeito de lente gravitacional é uma das consequências mais espectaculares da deflexão da luz pela gravidade, medida pela primeira vez em Sobral e na Ilha de Príncipe em 1919. Apesar de sua grande beleza e das inúmeras aplicações na astrofísica — desde a descoberta de planetas extrassolares até a cosmologia — esse efeito está ausente dos currículos até da graduação em física. Nesta contribuição, abordaremos alguns aspectos de lentes gravitacionais que requerem apenas matemática elementar (i. e. sem cálculo diferencial e integral) para sua compreensão, sendo facilmente acessíveis a alunos de graduação em engenharias, ciências físicas e afins, e até mesmo alunos avançados do ensino médio. Em particular, apresentaremos soluções analíticas simples para imagens de fontes pontuais e para arcos gravitacionais gerados pelo campo gravitacional de objetos compactos e galáxias. Além de serem ilustrações simples e didáticas dos efeitos de lente gravitacional, esses exemplos permitem trabalhar diversos conceitos matemáticos.

Palavras-chaves: Relatividade geral. Astrofísica. Lenteamento gravitacional. Arcos gravitacionais

Abstract. The gravitational lensing effect is one of the most spectacular consequences of light deflection by gravity, which was measured for the first time in Sobral and in Prince Island in 1919. Despite its beauty and the numerous applications in astrophysics — from the discovery of exoplanets to cosmology — this effect is absent from the curricula of undergraduate courses, even for physics majors. In this contribution we shall address a few aspects of gravitational lensing that require only elementary mathematics (i.e. without the need of calculus) for their understanding, being accessible to undergraduate students in STEM fields and even advanced high school students. In particular, we will present simple analytic solutions for the images of point sources and for gravitational arcs generated by the gravity field of compact objects and galaxies. Besides being simple and pedagogical illustrations of the effects of gravitational lensing, these examples allow one to explore different mathematical concepts.

Keywords: General Relativity. Astrophysics. Gravitational Lensing. Gravitational arcs

1 INTRODUÇÃO

Além de comprovar a previsão da teoria de relatividade geral de Albert Einstein, a observação da deflexão da luz pela gravidade durante o eclipse de 1919 abriu uma nova área de pesquisa, a do lenteamento gravitacional. Apesar de amplamente utilizado nas pesquisas em astrofísica e cosmologia, em particular na última década, esse efeito está praticamente ausente dos livros-texto e há uma escassez de material didático sobre o assunto. Existem artigos em nível de divulgação (como, por exemplo, MAKLER (2009)) e textos técnicos, mas há uma carência de material em nível intermediário. Um dos propósitos deste artigo é contribuir para suprir essa carência.

Iniciaremos com uma revisão histórica do assunto,

apesentando as discussões anteriores a Einstein, as tentativas de medir a deflexão da luz, o posteriorascimento da teoria de lentes, e as sucessivas detecções e descobertas usando esse fenômeno. Essa história também é um excelente exemplo de como funciona o método científico. São raros os exemplos na história de física em que um único acontecimento é tão decisivo em apoiar ou descartar uma teoria. Por outro lado, o desenvolvimento científico é não linear, sujeito ao acaso, a tentativas frustradas, a resultados errados, entre outras vicissitudes. Tudo isso faz parte da história da deflexão da luz.

Em seguida apresentaremos o formalismo de lente gravitacional e algumas soluções. Como mencionado, existem excelentes textos técnicos sobre o assunto de

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

lentes gravitacionais, como por exemplo, SCHNEIDER, EHRLERS e FALCO (1999), PETTERS, LEVINE e WAMBSGANSS (2001), MOLLERACH e ROULET (2002), DODELSON (2017). No entanto, são todos na língua inglesa e voltados para alunos de pós-graduação ou alunos avançados da graduação em física e ciências afins (requerendo o uso de cálculo diferencial e integral avançado, entre outro ferramental matemático). Por outro lado, diversos fenômenos de lentes podem ser apresentados usando o ferramental matemático do ensino médio.

Nesta contribuição, selecionamos material que não requer cálculo diferencial e integral e que, a princípio, seria acessível a alunos no início da graduação. Com ele exploramos de forma simplificada algumas aplicações reais do efeito de lente, como imagens múltiplas, arcos e anéis de Einstein. Em particular, a discussão de arcos e a da formação de anéis está ausente dos livros-texto da área e até mesmo dos artigos de revisão. Até onde sabemos, esta é a primeira publicação a abordar esses assuntos de forma didática. Embora as soluções mencionadas sejam simples e conhecidas na literatura, a abordagem utilizada é original.

Um dos objetivos desta contribuição é que este material (ou parte dele) possa ser utilizado por professores em suas atividades didáticas, seja em sala de aula ou através de atividades complementares a serem propostas. Como ele pode ser aplicado em diferentes níveis, propomos dois percursos que podem ser feitos, um utilizando vetores e outro que não requer o uso de vetores.

Esperamos com esta contribuição ao mesmo tempo motivar o leitor a aprender sobre o assunto e motivá-lo para se utilizar dele como recurso didático. Tanto nos aspectos de desenvolvimento da ciência, quanto nos aspectos mais quantitativos e formais de lentes gravitacionais, a deflexão da luz mostra-se um recurso extremamente rico que vale a pena ser explorado.

2 BREVE HISTÓRIA DO LENTEAMENTO GRAVITACIONAL

Iniciaremos fazendo uma breve revisão histórica sobre o fenômeno de lente gravitacional, começando com as previsões sobre o desvio da luz, mesmo antes de Einstein, e chegando até algumas descobertas modernas e à exploração desse fenômeno como uma ferramenta para a astrofísica e a cosmologia.

Para mais informações sobre esses aspectos históricos sugerimos a consulta a algumas das seguintes publicações: EINSENSTAEDT e PASSOS VIDEIRA (1995), MOREIRA e Videira (1995), RENN, SAUER e Stachel (1997), KENNEFICK (2012), sobre a medida da deflexão da luz, e SCHNEIDER, EHRLERS e

FALCO (1999), MOLLERACH e ROULET (2002), ELLIS (2010), para o desenvolvimento da teoria e medidas de lentes, de onde parte deste material foi retirado.

2.1 Previsões newtonianas para a deflexão da luz

Fonte de luz Posição aparente

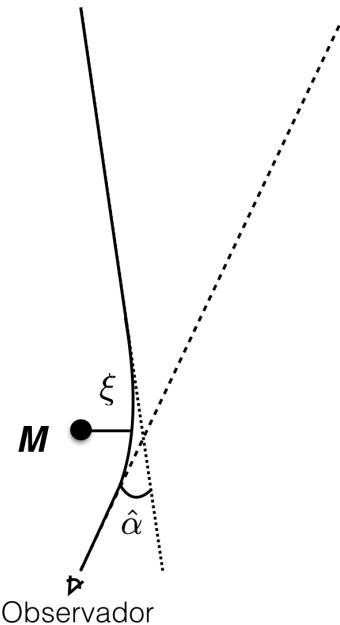


Figura 1: Diagrama da deflexão de luz por um corpo massivo. A linha contínua mostra a trajetória real da luz. A linha tracedada mostra a posição aparente da fonte luminosa vista pelo observador (reta que tangencia a direção de chegada da luz). O ângulo de deflexão α é o ângulo entre as retas tracejada e pontilhada (que tangencia a direção do raio de luz emitido). A distância ξ é o chamado parâmetro de impacto da luz incidente. Observação: o diagrama é apenas esquemático para ilustrar as quantidades envolvidas. Todas as dimensões estão fora de escala.

Já em 1704 Isaac Newton, no seu livro *Optics*, especulou sobre a possibilidade do desvio da luz por corpos massivos. No entanto, ele não apresentou nenhuma discussão matemática sobre o problema, atendo-se ao plano conceitual. Por outro lado, em 1783 John Mitchell, baseado na especulação de Newton, desenvolveu um método para medir a massa de uma estrela através da diminuição da velocidade da luz no seu campo gravitacional e enviou uma carta a Henry Cavendish, comentando-lhe sobre este método¹. Essa carta levou

¹Nesta mesma carta Mitchell menciona a possibilidade da existência de um corpo com massa suficiente para “parar” a luz emitida, tornando-se invisível. Tal objeto se assemelharia muito a um buraco negro (WILL, 1988).

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

Cavendish a calcular o ângulo de deflexão da luz se propagando próxima a um objeto esfericamente simétrico de massa M , supondo que a luz é composta por corpúsculos e que a aceleração dos corpos num campo gravitacional é independente da sua massa (como ocorre na gravitação de Newton). Cavendish obteve o resultado²

$$\hat{\alpha}_N = \frac{2GM}{c^2\xi}, \quad (1)$$

em que G é a constante universal da gravitação, c é a velocidade da luz no vácuo e ξ é a distância mínima do raio de luz até o objeto de massa M (ver Fig. 1). No Entanto, este resultado não foi publicado. Em 1801, Johann von Soldner publicou o primeiro trabalho³ sobre este assunto e, por isso, é tido como o primeiro a explorar a deflexão da luz e a inferir que os raios de luz são desviados num ângulo $\hat{\alpha}_N = 0.84''$ ao passar próximo do disco solar⁴. Porém, as ideias da natureza corpuscular da luz já não eram populares nessa época e talvez por isso tanto o trabalho de Cavendish quanto o de von Soldner não ficaram muito conhecidos.

2.2 As previsões de Einstein para a deflexão da luz

Passaram-se mais de 100 anos até que, em 1911, Einstein (desconhecendo o trabalho de von Soldner e seus predecessores), usando o seu Princípio de Equivalência⁵, calculou o desvio da luz, obtendo o mesmo valor do ângulo de deflexão que von Soldner (EINSTEIN, 1911). Ele também propôs que este ângulo poderia ser medido durante um eclipse solar e a primeira tentativa com este propósito foi feita em 1912 no Brasil, por uma expedição argentina à cidade de Cristina, no sul de Minas Gerais, liderada por Charles Dillon Perrine, então diretor do Observatório Astronômico de Córdoba (Argentina). Infelizmente (ou talvez felizmente, como veremos mais adiante) as condições climáticas impediram as observações (MOREIRA; VIDEIRA, 1995). A segunda tentativa ocorreu em 1914, quando Erwin Finlay-Freundlich dirigiu uma expedição para a Península da Criméia (que na época pertencia à Rússia e atualmente é território disputado entre esta e Ucrânia). Entretanto ele e sua equipe foram aprisionados por soldados russos

²Para um cálculo detalhado dessa relação, ver Will (1988).

³Para uma tradução inglesa desse trabalho, ver Jaki (1978).

⁴O símbolo " denotes a medida angular de segundo de arco, que corresponde a $1/3.600$ de grau, ou $1/1.296.000$ da circunferência.

⁵Segundo esse princípio, o movimento de uma partícula em um campo gravitacional é (localmente) equivalente a seu movimento em um referencial acelerado sem a presença de gravidade. Por exemplo, um foguete acelerado no espaço equivale ao campo gravitacional na superfície da Terra, se a aceleração do foguete for igual à aceleração da gravidade. Esse princípio é um dos fundamentos da teoria da relatividade geral que foi desenvolvida posteriormente por Einstein.

por causa da Primeira Guerra Mundial e não puderam observar o eclipse (CORNELL; LIGHTMAN, 1983).

Em 1915 Einstein finaliza a sua Teoria da Relatividade Geral, que propõe uma visão inteiramente nova da gravitação, baseada na geometria. Em particular os fenômenos associados à gravidade são devidos à curvatura do espaço-tempo. Essa nova teoria fornece resultados equivalentes à teoria de Newton para o movimento de partículas com massa, para baixas velocidades e baixos campos gravitacionais. Além disso, ela explica a precessão do perihélio da órbita de Mercúrio, que não podia ser inteiramente descrita com a gravitação de Newton. De forma natural, essa teoria prevê que a luz seria defletida pela gravidade, mas o ângulo de deflexão é na realidade o dobro do seu primeiro resultado (baseado no princípio de equivalência e na gravitação de Newton), ou seja,

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi}, \quad (2)$$

levando a um desvio aproximado de $1.74''$ para um feixe de luz passando próximo do disco solar (EINSTEIN, 1916). Essa contribuição extra para o desvio da luz é devida à curvatura do espaço.

2.3 Primeira medida deflexão da luz: Sobral projeta Einstein

Após o resultado de Einstein de 1915, medir o desvio da luz pela gravidade tornou-se ainda mais interessante. Pelas visões estabelecidas sobre a luz e a gravidade, a deflexão poderia ser nula (como se pensava pela teoria ondulatória da luz) ou ter o desvio newtoniano da Eq. (1). Já a teoria de Einstein previa um valor inteiramente novo, dado pela Eq. (2). A teoria de Einstein previa então um fenômeno novo, além de conseguir explicar outros já conhecidos, como o perihélio de Mercúrio. Se confirmada essa previsão, isto daria uma força muito grande para a teoria. Por outro lado, se obtido o valor newtoniano, o valor nulo, ou mesmo outro valor distante do previsto pela relatividade geral, esta teoria ficaria descartada. O período da primeira guerra mundial foi conturbado para tentar medir o desvio da luz, já que a observação dos eclipses precisava da movimentação de cientistas e seus equipamentos, em um mundo dividido pela guerra. Em 1918 William Wallace, Director do Observatório de Lick, observou um eclipse em Washington, mas os equipamentos eram de baixa resolução e não permitiram medir a deflexão da luz. Aparentemente ele concluiu que não houve deflexão da luz e, consequentemente, a teoria de Einstein estava errada (ELLIS, 2010), mas em todo caso esse resultado não teve repercussão.

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

No ano de 1919, organizaram-se duas expedições para determinar o valor do ângulo de deflexão. O objetivo era medir as distâncias entre as estrelas à esquerda e à direita do Sol, durante o eclipse, comparando-as com medidas efetuadas meses antes sem a presença do Sol, quando elas eram visíveis durante a noite. A primeira equipe, dirigida pelo astrônomo inglês Sir Arthur Stanley Eddington, visitou a Ilha de Príncipe, na África. A segunda equipe, dirigida pelo inglês Andrew Claude de la Cherois Crommelin, estabeleceu-se na cidade de Sobral, no Estado de Ceará, Brasil.

Utilizando os dados das duas expedições, Eddington verificou que de fato as estrelas pareciam mais distantes uma das outras durante o eclipse, devido à deflexão dos raios de luz dessas estrelas pelo campo gravitacional do Sol. O ângulo de deflexão obtido a partir dessas medidas foi de $1.61'' \pm 0.30''$ (DYSON; EDDINTON; DAVIDSON, 1920), verificando a previsão da relatividade geral (e em oposição ao resultado newtoniano). Esse resultado era bastante robusto, baseado na observação de várias estrelas, em várias fotografias, nas duas localizações das expedições e utilizando equipamentos diferentes. Análises mais recentes daqueles dados comprovam essa afirmação.

Assim, com a medida durante um único evento, o resultado Newtoniano estava claramente descartado, enquanto a previsão de Einstein era verificada. Como foi dito, além de explicar fatos conhecidos, a teoria previa um efeito novo e que foi verificado poucos anos depois. Este experimento tornou-se o mais famoso teste da Relatividade Geral e foi o início da grande popularidade de Einstein.

Todas as medidas posteriores confirmaram a previsão da relatividade geral, com precisão crescente. Medidas contemporâneas da deflexão de raios de luz próximo ao limbo do Sol (realizadas pela modelagem de ocultações de fontes de rádio) confirmaram a previsão da relatividade geral com uma incerteza de apenas algumas partes em 10.000 (LEBACH, 1995; FOMALON et al., 2009). No visível, a astrometria de estrelas durante eclipses solares permitiu verificar o ângulo de deflexão com uma precisão de cerca 10% (JONES, 1976; SCHMEIDLER, 1985).

2.4 Desenvolvimento da teoria de lentes gravitacionais e primeiras previsões

Logo após a medida da deflexão da luz, EDDINTON (1920) notou que sob certas condições poderia haver múltiplos caminhos de luz conectando a fonte e o observador, traduzindo isto como a possibilidade de serem geradas imagens múltiplas de uma única fonte. Em 1924, Orest Chwolson considerou a existência de

estrelas duplas fictícias pelo lenteamento gravitacional estrela-estrela e, indo além, previu que, se houvesse um alinhamento perfeito entre as estrelas e o observador, seria gerada uma imagem com aspecto de anel (CHWOLSON, 1924). No entanto, ele não fez previsões sobre a observabilidade desses fenômenos.

Einstein, depois de discussões com o cientista amador Rudi W. Mandl, publicou um trabalho sobre a possibilidade de uma estrela atuar como lente sobre outra mais distante⁶ (EINSTEIN, 1936). Ele obteve os mesmos resultados que Chwolson e ainda concluiu que a chance de que esse fenômeno pudesse ser observado era desprezível.

No ano seguinte, Fritz Zwicky (que também fora abordado por Mandl) elevou o fenômeno do lenteamento gravitacional de simples curiosidade à categoria de potencial ferramenta astronômica (ZWICKY, 1937a; ZWICKY, 1937b). Ele considerou o lenteamento gravitacional de nebulosas extragaláticas (que atualmente chamamos de galáxias) ao invés de estrelas. Ele argumentou que o desvio da luz por galáxias não seria somente um teste adicional à Teoria da Relatividade Geral e sim um candidato natural a Telescópio Cósmico, já que objetos extra-galácticos (galáxias e aglomerados de galáxias) poderiam magnificar galáxias distantes. Além disso, ele também propôs que o desvio da luz, poderia constituir um método acurado para a determinação da massa de objetos extragaláticos que atuarem como lentes. Com o uso do Teorema do Virial⁷ ele estimou a massa dos aglomerados de Coma e Virgem. Ele afirmou que por serem mais massivos e envolverem distâncias maiores, esses objetos seriam melhores candidatos para observar o fenômeno do lenteamento que as estrelas. Zwicky concluiu que a probabilidade de detectar o efeito de lente gravitacional por galáxias era praticamente assegurada.

Devido às limitações observacionais daquele período, os trabalhos comentados anteriormente ficaram somente como suposições, até que, em 1961, descobriu-se uma nova classe de objetos extra-galácticos – os quasares (SCHMIDT, 1963). Esses objetos, cujo nome vem de *Quasi Stellar Object*, correspondem a intensas fontes de rádio, com aparência ótica estelar. Por terem seu espectro característico (o que permite identificar imagens múltiplas), estarem a distâncias cosmo-

⁶Foi descoberto que Einstein deduziu — em 1912 — as características básicas do lenteamento gravitacional: equação da lente, imagens duplas e suas magnificações. No entanto, estes cálculos foram publicados somente em 1936 (RENN; SAUER; Stachel, 1997).

⁷As estimativas de Zwicky da massa de aglomerados de galáxias o levaram a concluir sobre a existência da matéria escura (ZWICKY, 1933). Uma discussão sobre a determinação da massa de aglomerados através do teorema do virial, também pode ser feita nos cursos de física básica.

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

lógicas da nossa galáxia e serem altamente luminosos, os quasares se tornaram objetos ideais para se estudar o fenômeno do lenteamento gravitacional, como sugerido por Jean M. Barnothy (BARNOTHY, 1965).

A partir da conexão quasar – lenteamento gravitacional, muitos aspectos teóricos foram desenvolvidos. Em particular Sjur Refsdal deduziu, em 1964, as equações básicas das lentes gravitacionais (REFSDAL, 1964b). Ele observou que haveria um atraso temporal entre as imagens múltiplas formadas e para algumas fontes, como supernovas (REFSDAL, 1964a), esse efeito poderia ser medido. Como esse atraso temporal seria inversamente proporcional à taxa de expansão do Universo (conhecida como parâmetro de Hubble, H_0), ele sugeriu que medindo a separação angular e o tempo de atraso na chegada dos raios de luz das imagens lenteadas seria possível calcular H_0 e, indo além, testar diferentes teorias cosmológicas (REFSDAL, 1966b; REFSDAL, 1966a).

2.5 Descobertas e o nascimento de uma nova área na astrofísica



Figura 2: Imagem do quasar com imagem dupla Q0957+561 (pontos azuis mais brilhantes), mostrando a galáxia que atua como lente (de cor avermelhada, próxima ao quasar na parte inferior da figura). Imagem obtida no óptico com a câmera WFPC2 no Telescópio Espacial Hubble. Crédito: Telescópio Espacial Hubble, PI: George Rhee (imagem retirada de <http://www.astr.ua.edu/keel/agn/q0957.html>).

A primeira detecção de um sistema lenteado só foi ocorrer em 1979 com a descoberta da imagem dupla do quasar Q0957+561 por Dennis Walsh, Robert Carswell e Ray Weyman (WALSH; CARSWELL; WEYMANN, 1979) (Fig. 2). No óptico, esse quasar aparece como duas imagens pontuais com separação de 6''. O espectro das imagens mostrou tratar-se na realidade do

mesmo objeto. Entre as duas imagens, está a galáxia que atua como lente (a qual forma parte de um aglomerado de galáxias).

Menos de uma década depois, em 1986, as primeiras imagens distorcidas em forma de arco foram descobertas no aglomerado Abell A 370 (LYNDS; PETROSIAN, 1986; SOUCAIL et al., 1987). Bohdan Paczyński sugeriu que esses arcos são imagens de galáxias de fundo, fortemente distorcidas por aglomerados de galáxias atuando como lentes (PACZYNSKI, 1986a).



Figura 3: Imagem do anel de Einstein SDSS J162746.44-005357.5 obtida no óptico com o Telescópio Espacial Hubble. Créditos: NASA, ESA, A. Bolton (Harvard-Smithsonian CfA) e equipe SLACS. Imagem retirada de <http://hubblesite.org/gallery/album/entire/pr2005032g/>.

Pouco depois, em 1988 foi observado pela primeira vez, em imagens de fontes de rádio, um “anel de Einstein” (HEWITT et al., 1988). Este evento acontece quando há um alinhamento quase perfeito entre o observador, lente e fonte, de modo que a fonte é distorcida na forma de um anel luminoso (Fig. 3). Mais adiante veremos exemplos da formação desses anéis.

Já em 1989 observou-se pela primeira vez o lenteamento de um quasar por estrelas na galáxia que atua como lente, fenômeno conhecido como microlenteamento, (IRWIN et al., 1989).

Em 1986, Paczyński propôs o uso do efeito de lenteamento gravitacional de estrelas para procurar matéria escura em forma de objetos massivos compactos no halo de nossa galáxia (conhecidos como *Massive Compact Halo Objects* — MACHOS) (PACZYNSKI, 1986b). Naquele ano foram estabelecidas duas colab-

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

borações, a Anglo-Australiana MACHO⁸ e a francesa EROS⁹. Durante três anos, após monitorar três milhões de estrelas na Grande Nuvem de Magalhães, foram detectadas por ambas colaborações três eventos de lenteamento, com objetos de massa entre 0.1 e 1 massas solares atuando como lentes, impondo limites à quantidade de matéria escura (em forma de MACHOS) dentro de nossa galáxia (ALCOCK, 1993; TISSERAND; LE GUILLOU; AFONSO, 2007). Em particular, esses resultados mostraram que a maior parte da matéria escura não pode estar na forma de objetos compactos no halo de nossa galáxia.

Já no ano de 1992 surgiu a colaboração OGLE¹⁰, com o objetivo de monitorar estrelas no centro de nossa galáxia para testar mais uma proposta de Paczyński: a procura de exoplanetas. Este projeto descobriu um exoplaneta no ano 2003 (BOND, 2004), sendo portanto o primeiro planeta fora do Sistema Solar detectado através do efeito de lente gravitacional. Até o momento foram descobertos 89 exoplanetas¹¹ utilizando essa técnica.

Em 2014 observou-se pela primeira vez uma supernova (explosão da uma estrela) lenteada (QUIMBY; OGURI, 2014), em 2015 imagens múltiplas de uma supernova lenteada por aglomerado de galáxias (KELLY, 2015) e em 2017 imagens múltiplas de uma supernova lenteada por uma galáxia (GOOBAR, 2017). Ainda em 2017, observou-se pela primeira vez de forma direta a deflexão da luz por uma anã branca, possibilitando calcular sua massa e comprovando previsões sobre evolução estelar desses objetos (SAHU, 2017).

Citamos anteriormente, apenas alguns exemplos de descobertas associadas ao fenômeno de lente gravitacional, na realidade, apenas a um regime desse fenômeno, conhecido como lenteamento gravitacional forte, no qual são geradas grandes magnificações e distorções das imagens, imagens múltiplas e anéis de Einstein.

Outro regime, o chamado lenteamento gravitacional fraco, tem sido amplamente utilizado em aplicações astrofísicas e cosmológicas, desde a escala de galáxias até a estrutura em grande escala do Universo. Uma boa parte da cosmologia observational atual se baseia em projetos de grande envergadura que mapeiam a esfera celeste obtendo imagens de alta precisão em grandes áreas. O efeito fraco de lente gravitacional é um ingrediente chave desses projetos, tanto em operação como planejados para o futuro próximo.

⁸<http://wwwmacho.mcmaster.ca/>

⁹<http://eros.in2p3.fr/>

¹⁰<http://ogle.astrouw.edu.pl/>

¹¹Interactive Extra-solar Planets Catalog:
<http://exoplanet.eu/catalog-microlensing.php> acessado em
25/02/2019

De modo geral temos vivido um período de descobertas nessa área, que se intensificaram na última década, tornando o efeito de lentes uma ferramenta de múltiplas aplicações em astrofísica e cosmologia e levando a seu estabelecimento como área de pesquisa.

Neste trabalho discutiremos alguns aspectos do regime de lenteamento forte, mostrando soluções simples usando funções elementares. Em particular, discutiremos duas configurações que nos ajudarão a entender duas aplicações mencionadas anteriormente, o efeito de microlenteamento e a geração de arcos e anéis de Einstein.

3 INTRODUÇÃO À TEORIA DE LENTES GRAVITACIONAIS: A EQUAÇÃO DA LENTE E SIMETRIA AXIAL

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos importantes para atacar o problema do lenteamento gravitacional. Em particular, estabeleceremos a chamada equação da lente, que é o ponto de partida para todos os resultados. Nesse processo ficarão claras as hipóteses e condições para a validade do tratamento utilizado neste artigo. Com a apresentação de algumas quantidades físicas importantes ligadas a ângulos, distâncias e à geometria do fenômeno de modo geral, iremos fixar a notação que será utilizada ao longo do artigo.

3.1 A equação da lente

Em todas as situações que iremos discutir, as dimensões da lente são muito menores do que as distâncias entre observador e lente e entre lente e fonte. Por exemplo, no caso do microlenteamento na nossa galáxia, as distâncias típicas são na escala de kiloparsecs (1 kpc $\simeq 3 \times 10^{16}$ km), enquanto o raio típico de uma estrela é na escala de 10^6 km. Já no caso de galáxias, as distâncias envolvidas são da ordem de Gpc (gigaparsec = 10^6 kpc), enquanto o tamanho típico de uma galáxia é da ordem de 100 kpc. Além disso, ao longo do seu trajeto da fonte até nos, a luz é defletida essencialmente por um único objeto (uma estrela ou uma galáxia nos exemplos citados). Ou seja, a luz se propaga a maior parte do tempo no Universo sem ser desviada até que encontra um defletor (a lente) e depois segue até o observador. É, portanto, uma excelente aproximação, considerar que a luz é defletida em um único ponto (ao contrário do que mostra a Fig. 1, que é meramente ilustrativa e está fora de escala).

Uma representação dessa situação é ilustrada na Fig. 4, que mostra um raio de luz emitido por uma fonte situada a uma distância D_{OS} do observador e a uma distância η do eixo óptico (escolhido como a direção que

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

passa do observador pelo centro da lente, reta tracejada na figura). A luz se propaga até o plano onde está localizada a lente, passando por uma distância ξ do centro da lente e sendo defletida de um ângulo $\hat{\alpha}$. Esse raio de luz atinge o observador em um ângulo θ em relação ao eixo óptico. Essa é a geometria básica do lenteamento que iremos considerar. Como foi discutido anteriormente, devido às dimensões típicas envolvidas, na prática é como se o desvio da luz ocorresse a uma única distância (onde está localizada a lente, a uma distância D_{OL} do observador). A luz de fontes em diferentes posições $\vec{\eta}$ será defletida em diferentes pontos $\vec{\xi}$, mas sempre no mesmo plano, como representado na figura. Esse plano é chamado de plano da lente (é o plano perpendicular à linha de visada que passa pelo centro da lente).

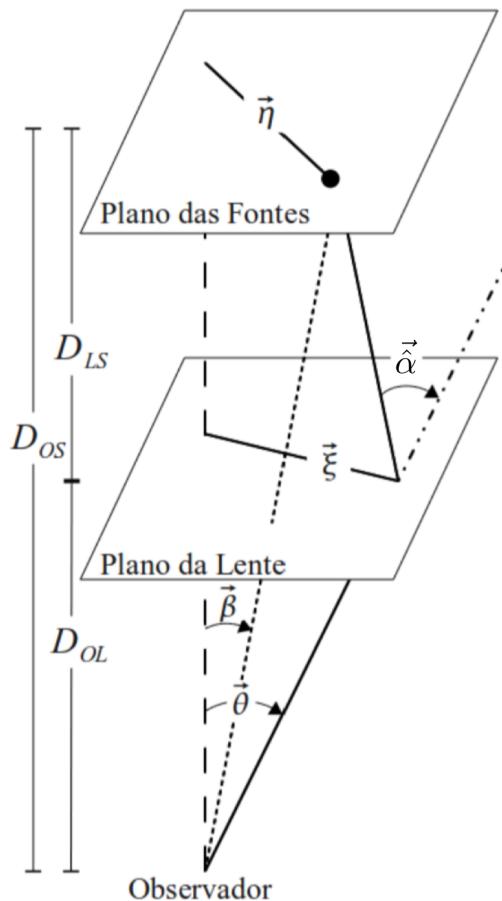


Figura 4: Representação esquemática do lenteamento gravitacional com as variáveis relevantes indicadas. Note que os ângulos estão altamente exagerados para permitir a visualização.

Se não houvesse deflexão da luz, o raio emitido pela fonte seria recebido em uma direção $\vec{\beta}$ em relação ao eixo da lente (ficará claro mais adiante porque estamos

denotando os ângulos como vetores). Assim, $\vec{\beta}$ é a posição angular real da fonte e $\vec{\theta}$ a posição observada no céu, após sofrer uma deflexão $\hat{\alpha}$. Encontrar a relação entre $\vec{\beta}$ e $\vec{\theta}$ nos permitirá abordar as situações do lenteamento, como ficará claro nas próximas seções. Mas antes de obter essa relação, é preciso discutir uma última aproximação.

As linhas mostradas na Fig. 4 definem triângulos. Por exemplo, $\vec{\eta}$, o eixo óptico e a linha pontilhada definem um triângulo retângulo. Estamos acostumados a relacionar os lados de triângulos com os ângulos através das funções trigonométricas. Na geometria relevante para lentes os ângulos envolvidos são extremamente pequenos, da ordem de segundos de arco ($1'' \simeq 5 \times 10^{-6}$ rad). Nesse caso a seguinte relação é uma excelente aproximação¹² $\sin x = x$. Do mesmo modo, podemos usar a aproximação $\cos x = 1$.

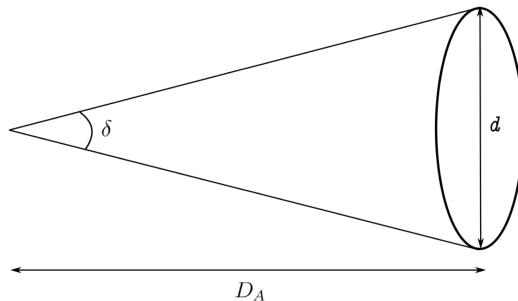


Figura 5: Diagrama para a distância de diâmetro angular (fora de escala, pois $\delta \ll 1$).

Um comprimento físico d subtenderá um ângulo δ se ele estiver a uma distância D_A do observador (ver fig. 5). Usando a aproximação discutida anteriormente, é fácil mostrar que a relação entre essas quantidades fica, simplesmente,

$$\delta = \frac{d}{D_A}. \quad (3)$$

Com essa relação, podemos definir as variáveis angulares a partir das posições da imagem no plano das fontes e no plano da lente:

$$\vec{\theta} = \vec{\xi}/D_{OL}, \quad \vec{\beta} = \vec{\eta}/D_{OS}. \quad (4)$$

Por isso estamos usando a notação vetorial para os ângulos, pois eles possuem unidades angulares, mas uma direção. É fácil imaginar isso na esfera celeste, uma separação angular entre dois pontos, com uma dada direção.

¹²Excelente mesmo, no sentido de que o erro relativo dessa aproximação, para ângulos de $1''$ é da ordem de 10^{-11} , ou seja, um bilhãoésimo de porcento.

LENTE GRAVITACIONAL: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

Agora estamos prontos para obter a equação da lente. Vamos denotar por $\vec{\eta}'$ a distância física no plano das fontes a partir do ângulo $\vec{\theta}$ ($\vec{\eta}' = \vec{\theta}D_{OS}$, conforme a Eq. (3)). A diferença entre $\vec{\eta}'$ e $\vec{\eta}$ é a distância associada à deflexão $\hat{\alpha}$, ou seja, $\hat{\alpha}D_{OL}$, já que esse ângulo é definido no plano da lente. Desse modo, teremos $\vec{\eta}' - \vec{\eta} = (\vec{\theta} - \vec{\beta})D_{OS} = \hat{\alpha}D_{OL}$. Assim, obtemos finalmente que

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \hat{\alpha}. \quad (5)$$

A expressão de $\hat{\alpha}$ depende do modelo físico da lente. Por exemplo, vimos que o desvio da luz por uma lente pontual é dado pela expressão (2). A dependência em ξ pode ser convertida a uma função de θ usando a relação (4).

A relação (5) é conhecida como equação da lente e é fundamental para o lenteamento gravitacional, uma vez que resolvendo essa equação é possível obter a(s) posição(ões) da(s) imagem(ns) a partir da posição $\vec{\beta}$ das fontes e da expressão para o ângulo de deflexão $\hat{\alpha}(\vec{\theta})$.

É importante considerar a equação da lente na forma vetorial, como anteriormente, pois se a deflexão da luz tiver uma componente tangencial, os vetores $\vec{\theta}$ e $\vec{\beta}$ não serão paralelos. Por outro lado, essa abordagem pode gerar alguma dificuldade para alunos não familiarizados com vetores e com representações tridimensionais. Na subseção seguinte nos restringiremos ao caso em que a deflexão da luz é apenas na direção radial, o que ocorre pra lentes com simetria axial. Essa situação é mais fácil de visualizar e não requer a utilização de vetores. Ele será suficiente para compreender e permitir fazer os cálculos das seções seguintes. Portanto, é possível pular a dedução da equação da lente e, nesse ponto, ir direto para a seção 3.2 por questões pedagógicas.

Tendo obtido a equação da lente, cabe perguntar, onde entra a relatividade geral nessa história? Em primeiro lugar, ela aparece explicitamente na expressão do ângulo de deflexão (Eq. 2), que foi deduzido por Einstein usando essa teoria e que requer um ferramental que está fora do escopo deste texto. Esse resultado já leva em conta a curvatura do espaço-tempo e outros conceitos da relatividade geral. Ele é obtido no chamado limite de campo fraco, que é uma excelente aproximação para todos os corpos celestes, exceto na proximidade de buracos negros.

Ao deduzir a equação da lente, consideramos implicitamente que a luz se propaga em linha reta, exceto ao passar pelo plano da lente. Mas será que isso seria válido também em situações cosmológicas, em que é preciso considerar a expansão (e possível curvatura) do Universo? A resposta é, milagrosamente, que sim.

Ou seja, a equação da lente (5) é válida mesmo em situações cosmológicas, desde que as distâncias utilizadas sejam as chamadas de diâmetro angular, que são definidas exatamente a partir da relação entre distância, tamanho perpendicular e ângulo conforme a Fig. (5) e a Eq. (3). Em cosmologia há várias definições de distância aplicáveis a cada problema. Em geral elas dependem do modelo cosmológico e levam em conta a composição do Universo e a taxa de expansão. Em geral, $D_{OS} \neq D_{OL} + D_{LS}$, mesmo para um Universo plano. De qualquer forma não precisaremos lidar diretamente com as distâncias cosmológicas, pois elas serão absorvidas (ou seja, embutidas) em algumas definições, como varemos mais adiante.

É importante ressaltar, no entanto, que a expressão (5) é válida para um Universo homogêneo e isotrópico em grandes escalas, como é o caso dos modelos cosmológicos mais aceitos atualmente. Tecnicamente ela pode ser mostrada considerando uma perturbação linear sobre a métrica homogênea e isotrópica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cada uma das três possíveis geometrias das seções espaciais (esférica, plana e hiperbólica) precisa ser tratada separadamente. Tal demonstração mais rigorosa é praticamente ausente das publicações na área, sendo uma exceção o livro de PETERS, LEVINE e WAMSGANSS (2001).

Em resumo, o tratamento realizado será adequado para aplicações cosmológicas, como por exemplo quando considerarmos que a lente é uma galáxia ou aglomerado de galáxias.

3.2 Simetria axial

Nesta seção vamos considerar o caso de lentes com simetria axial, cujo tratamento é bastante simples, mas que já permitem abordar exemplos ilustrativos de fenômenos de lentes.

Como mencionado anteriormente, a deflexão da luz por lentes localizadas ocorre como se toda a distribuição de massa estivesse concentrada no plano da lente. Para efeitos de lenteamento, o que importa é a distribuição de massa projetada nesse plano. Nesse sentido, uma distribuição com simetria cilíndrica ao longo da linha de visada ou com simetria esférica (entre outros exemplos) produzirá uma distribuição de massa com simetria axial, ou seja, em que a densidade de massa depende apenas da direção radial no plano da lente. Escolhendo o centro do sistema de coordenadas ($\vec{\theta} = 0$) passando pelo centro de simetria da lente, temos que a densidade será apenas uma função de $\xi = |\vec{\xi}|$ (e portanto de $\theta = |\vec{\theta}|$). Dessa forma, o ângulo de deflexão será função também apenas do módulo do parâmetro de impacto (ξ). Além disso, pela simetria axial do pro-

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

blema, a deflexão da luz só pode ter componente radial, não tangencial, ou seja¹³, $\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \hat{\alpha}(\xi)\hat{e}_\xi$.

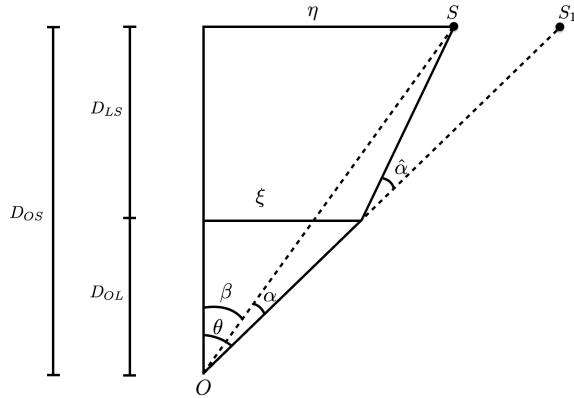


Figura 6: Esquema do lenteamento gravitacional para uma fonte com simetria axial. A fonte pontual S está localizada a uma distância D_{OS} do observador e η do eixo óptico. Esta seria vista na direção β se não houvesse o efeito de lente. Devido à deflexão de um ângulo $\hat{\alpha}$ pela lente situada a uma distância D_{OL} do observador, a fonte é vista na direção θ , correspondendo à posição aparente S_1 .

Como a deflexão é puramente radial, a propagação da luz ocorre em um único plano (ou seja, ξ e $\vec{\eta}$ na Fig. 4 possuem a mesma direção), de modo que o diagrama da Fig. 4 pode ser simplificado pelo mostrado na Fig. 6 em um único plano. A equação da lente pode ser escrita na forma escalar

$$\beta = \theta - \hat{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_{OS}}, \quad (6)$$

lembrando que $\hat{\alpha}$ é o ângulo de desvio (Eq. 2 no caso de lente pontual).

Note que essa equação não é o módulo da Eq. (5), mas sim uma componente dela, a componente ao longo da direção do plano de propagação do raio de luz. Nessa notação θ e β são definidos em retas que contêm esse plano, como na Fig. 6 (e podem ter sinais positivos ou negativos), não mais sendo vetores no plano das lentes e das fontes.

O ângulo de deflexão depende de distribuição de matéria na lente. No caso de lentes com simetria axial sua expressão é extremamente simples. A situação é análoga ao que ocorre em 3D no caso do campo gravitacional (ou elétrico) de sistemas com simetria esférica. Nesses casos, o campo a uma distância r do centro é dado pela expressão do campo gerado por uma massa (carga) pontual situada em $r = 0$, onde a massa (carga) é aquela contida dentro do raio r . Ou seja, a massa

¹³Aqui usaremos a notação \hat{e}_X para denotar um versor, ou seja, um vetor unitário, na direção X .

(carga) exterior a esse raio não contribui para o campo naquele ponto. Uma forma elegante de mostrar esse fato é usando o teorema de Gauss.

No caso do ângulo de deflexão, este será dado exatamente pela expressão (2), onde a massa que contribui é aquela dentro de um círculo de raio ξ , $M(\xi)$. Em notação vetorial, a deflexão da luz por uma lente com simetria axial (Eq. 2) é dada, portanto, por

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}\hat{e}_\xi = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi^2}\vec{\xi}, \quad (7)$$

onde $M(\xi)$ é a massa contida em um disco de raio ξ , ou seja, ela é a massa contida ao longo da linha de visada em um cilindro de raio ξ . Isso pode ser mostrado, por exemplo, usando o teorema de Gauss em 2D (plano da lente).

Em caso de uma audiência não familiarizada com o cálculo vetorial, pode-se apresentar diretamente o diagrama da Fig. 6 e trabalhar direto com a equação da lente na forma (6) e com módulo da expressão (7). Algumas das soluções apresentadas neste artigo, como o caso da lente pontual, podem ser tratadas nessa abordagem.

Elas já fornecem exemplos interessantes de situações de lentes e são até realistas em alguns pontos. No entanto, será mais fácil obter e interpretar alguns resultados estando familiarizado com vetores, como no caso das soluções de arcos gravitacionais (sec. 5.2).

4 LENTE E FONTE PONTUAIS

No caso de uma lente pontual¹⁴ o ângulo de deflexão é dado pela Eq. (2). Substituindo essa expressão na Eq. (6), obtemos (lembrando que $\xi = \theta D_{OL}$)

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{\theta}. \quad (8)$$

Assim, dada a posição da(s) imagem(ns), podemos calcular a posição da fonte, ou seja, temos $\beta(\theta)$. Mas, na verdade, o que queremos é obter a posição da(s) imagem(ns), θ a partir da posição da fonte β . Para isso é necessário resolver a equação anterior para termos $\theta(\beta)$. Multiplicando ambos lados dessa equação por θ fica claro que temos uma equação de segundo grau para essa variável, que pode ser facilmente resolvida, fornecendo

$$\theta_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (9)$$

¹⁴Ou uma lente extensa com simetria axial, para raios de luz que passam além do raio do objeto, como seria o lenteamento pelo Sol ou outra estrela.

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

Neste caso temos duas soluções para as posições das imagens, ou seja, teremos duas imagens de uma mesma fonte, assim como observado por Walsh, Carswell e Weymann em 1979!

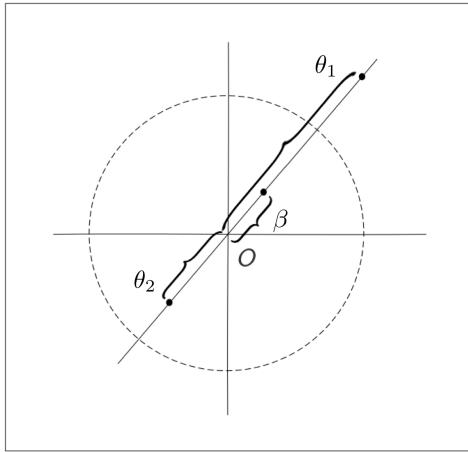


Figura 7: Imagens θ_1 e θ_2 de uma fonte pontual situada na posição β em relação ao centro da lente (pontual). A curva tracejada indica um círculo de raio θ_E .

O termo constante na Eq. (9) nos fornece uma escala angular característica do lenteamento. Definindo

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}}} \frac{4GM}{c^2} \quad (10)$$

essa equação fica escrita como

$$\theta_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2}. \quad (11)$$

Note que teremos sempre $\theta_1 \geq \theta_E$ e $\theta_2 \leq \theta_E$ (Fig. 7). No caso em que $\beta = 0$ (alinhamento perfeito entre a lente, a fonte e o observador), teremos $\theta_{1,2} = \pm \theta_E$. Nesse caso, pela simetria do problema, a imagem ficará na posição θ_E em relação ao centro, em qualquer direção. Ou seja, será formado um anel, conhecido como Anel de Einstein. Essa transição abrupta entre duas imagens pontuais e um círculo parece esquisita, mas é devida às suposições que fizemos, em particular, ao fato da fonte ser pontual. Na seção 5.2 estudaremos um exemplo com fonte finita e essa transição ficará mais clara.

De qualquer forma, mesmo sendo uma situação idealizada, as soluções (11) representam muito bem o que ocorre no lenteamento de uma estrela por outra estrela, efeito conhecido como microlenteamento. Como mencionado na seção 2.5, esse efeito tem sido observado em vários projetos observacionais. De particular interesse são os eventos em que a lente não é detectada por sua emissão de luz, sendo um candidato a MACHO. Soluções em que a lente não é uma massa pontual, mas sim

um conjunto de massas pontuais são de grande importância para a detecção de planetas extrassolares. Nesse caso, as massas representam a estrela central e seus planetas. Essas soluções são mais complexas e fogem ao escopo deste capítulo. Para exemplos, ver PETTERS, LEVINE e WAMBSGANSS (2001), MOLLERACH e ROULET (2002).

5 LENTE EXTENSA: ESFERA ISOTÉRMICA SINGULAR

A lente pontual é um ótimo modelo para distribuições concentradas de matéria, especialmente estrelas e planetas. No entanto, sistemas na escala de galáxias e aglomerados de galáxias possuem uma distribuição mais difusa de matéria. Por um lado, a matéria visível é claramente espalhada, seguindo a distribuição de estrelas. Por outro lado, a maior parte da matéria desses objetos está sob a forma de matéria escura (??) e se estende muito além da componente visível. Quando observamos arcos gravitacionais, apesar de sua luz passar por partes transparentes de lente, são regiões em que ainda há a presença da massa da lente e sua distribuição espacial é importante.

De forma bastante surpreendente, a combinação da distribuição de estrelas, gás e matéria escura em muitas galáxias acaba levando a um perfil radial de densidade na forma (ver, por exemplo, (DE FREITAS; MAKLER; Dúmet-Montoya, 2018) e referências nela citadas):

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi Gr^2}, \quad (12)$$

em que σ_v^2 é um parâmetro ligado à massa e representa a dispersão de velocidades unidimensional das partículas. Esse modelo de distribuição de massa é conhecido como Esfera Isotérmica Singular (TURNER; OS-TRIKER; GOTTFRIED, 1984; BINNEY; Tremaine, 1987; SCHNEIDER; EHLERS; FALCO, 1999). Como veremos a seguir, esse tipo de modelo permite obter soluções analíticas muito simples para diversas quantidades de problemas de lentes.

É possível mostrar que nesse modelo a massa contida dentro de um cilindro de raio ξ é dada por

$$M(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{G} \xi. \quad (13)$$

Substituindo essa expressão na Eq. (7), obtemos

$$\hat{\alpha} = 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \hat{e}_\xi, \quad (14)$$

ou seja, o ângulo de deflexão é constante em módulo e

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

aponta para fora na direção radial¹⁵. A equação da lente (5) nesse caso fica

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_E \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|}, \quad (15)$$

em que

$$\theta_E = 4G \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \left(\frac{\sigma_v}{c} \right)^2. \quad (16)$$

Essa é exatamente a expressão do raio de Einstein neste caso, como será discutido na próxima seção.

Para escrever a equação da lente (15) na forma escalar (6), ou seja, considerando apenas o plano observador-lente-fonte, é preciso notar que o ângulo de deflexão apontar na direção radial para fora implica em $\alpha = \theta_E$ para $\theta > 0$ e $\alpha = -\theta_E$ para $\theta < 0$. Desse modo, a equação da lente fica

$$\beta = \theta \mp \theta_E, \quad (17)$$

onde o sinal do segundo termo é o oposto do sinal de θ (ou seja, $\beta = \theta - \theta_E$ se $\theta > 0$ e $\beta = \theta + \theta_E$ se $\theta < 0$).

5.1 Solução da equação da lente e fontes pontuais

As imagens para uma fonte pontual podem ser obtidas invertendo (ou seja, solucionando para θ) a equação da lente, nas formas (15) ou (17):

$$\theta_{1,2} = \beta \pm \theta_E, \quad (18)$$

ou, na forma vetorial,

$$\vec{\theta}_{1,2} = (\beta \pm \theta_E) \hat{e}_\beta = (\beta \pm \theta_E) \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}. \quad (19)$$

Note que a segunda solução (com sinal negativo), só existe se houver uma solução com $\theta < 0$ na equação (18), ou seja, se $\beta < \theta_E$. Desse modo, temos três possíveis soluções, dependendo da posição da fonte:

- $\beta = 0$: A imagem é formada em $\theta = \theta_E$ gerando um anel (como no caso da lente pontual)
- $\beta < \theta_E$: A Eq. (17) possui duas soluções, gerando uma imagem em $\theta = \theta_E + \beta$, fora do raio de Einstein e outra em $\theta = \theta_E - \beta$, dentro desse raio. A separação angular entre as duas imagens é $\delta\theta = 2\theta_E$.

¹⁵É interessante notar que uma tal deflexão constante (ou seja, independente da distância ao centro da lente) e radial pode ser reproduzida em um meio material com uma lente em formato de cone. Essa representação reproduz fielmente o efeito de lente gravitacional para o modelo da esfera isotérmica singular e permite visualizar os resultados que serão discutidos nesta seção de forma prática. Uma lente nesse formato é relativamente fácil de ser produzida em uma oficina utilizando um torno mecânico.

- $\beta \geq \theta_E$: Nesse caso a equação da lente tem apenas uma solução, $\theta = \theta_E + \beta$

Vemos portanto que a multiplicidade das imagens depende da posição da fonte, que é a situação mais comum para outras distribuições de massa. Quando há duas soluções, uma imagem fica fora do raio de Einstein, enquanto a segunda fica dentro (como no caso da lente pontual). No caso em que há apenas uma imagem, esta fica fora do raio de Einstein. Essa é uma situação genérica de lentes com simetria axial quando há uma singularidade no centro da lente (ou seja, quando a densidade formalmente vai a infinito no centro da lente¹⁶). Para lentes não singulares e/ou sem simetria axial, uma multiplicidade maior das imagens é possível. Por exemplo, para lentes elípticas (ou seja, cuja distribuição de massa projetada no plano da lente possui simetria elíptica) singulares, podem haver 1, 2, ou 4 imagens, dependendo da posição da fonte. Do mesmo modo como há diversos quasares com imagens duplas, já foram descobertos vários sistemas com quatro imagens. Essa configuração é conhecida como “cruz de Einstein”, pois as posições das quatro imagens fazem um desenho semelhante a uma cruz. Na próxima seção veremos outras situações comuns de efeito de lente, a saber, arcos e anéis. É conveniente escrever as soluções da Eq. (19) em coordenadas polares. Sendo agora $\beta = |\vec{\beta}|$ e $\theta = |\vec{\theta}|$ as coordenadas radiais e ϕ e φ as coordenadas angulares, respectivamente no plano das fontes e da lente, as duas soluções da (19) podem ser escritas como

$$\theta = \theta_E + \beta, \quad \varphi = \phi, \quad (20)$$

$$\theta = \theta_E - \beta, \quad \varphi = \phi + \pi. \quad (21)$$

Essas expressões serão úteis na próxima seção.

Voltando ao caso mais geral de simetria axial. Sempre que observador, lente e fonte estiverem alinhados (i.e., $\beta = 0$) a imagem gerada será um anel, pela simetria do problema. Utilizando a equação da lente (5–6), a expressão geral para o ângulo de deflexão (7) e a conversão das distâncias físicas para as variáveis angulares (4), é fácil ver que a expressão geral para o raio de Einstein é dada por

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM(\theta_E)}{c^2}} \quad (22)$$

A distribuição radial de matéria irá definir a forma funcional de $M(\theta)$ e, resolvendo essa equação para θ_E ,

¹⁶Naturalmente essa singularidade não é física, mas apenas uma boa aproximação. Por exemplo, uma estrela não é pontual e sua densidade é finita. Mas nas situações relevantes é suficiente tratá-la como fonte pontual. Do mesmo modo, as galáxias não possuem uma densidade infinita, mas os modelos isotérmicos singulares são uma boa aproximação no que se refere aos efeitos de lentes.

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

obtemos a expressão do raio de Einstein. É fácil ver que nos casos da lente pontual e da esfera isotérmica singular, a expressão (22) nos leva à (10) e à (16), respectivamente.

Quando o problema não possui simetria axial, não há mais a formação de uma imagem pontual em anel. Ainda assim, o raio de Einstein definido na Eq. (22) nos fornece uma separação angular típica entre imagens múltiplas, como vimos nos casos de lente pontual e esfera isotérmica.

5.2 Fontes circulares e arcos gravitacionais

Até o momento, tratamos as fontes como pontuais, o que é uma ótima aproximação para algumas situações reais, como o lenteamento de estrelas e a formação de imagens múltiplas de quasares. No entanto, para abordar outros fenômenos, como a formação de arcos gravitacionais e anéis de Einstein — especialmente para entender a transição entre imagens múltiplas e a formação de um anel — é preciso considerar fontes com um tamanho finito (ou seja, com tamanho não desprezível). Aqui iremos considerar fontes circulares (representando galáxias), como uma primeira aproximação para atacar o problema de fontes finitas.

Primeiro vamos escrever a expressão da fonte circular em coordenadas polares $\beta(\phi)$, para depois obter sua(s) imagem(ns) $\theta(\varphi)$.

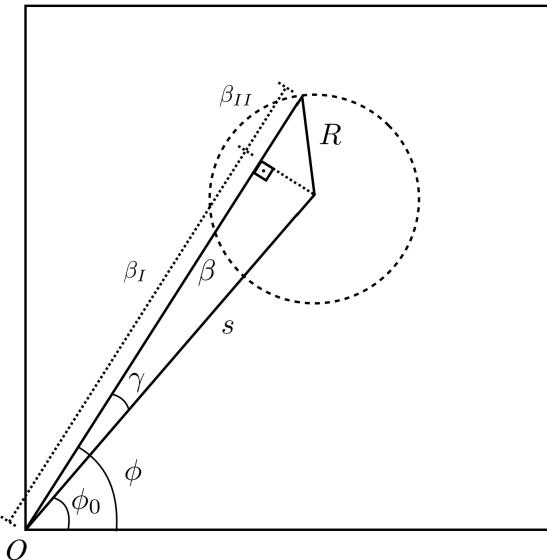


Figura 8: Diagrama de uma fonte circular de raio R , localizada a uma distância s do centro da lente em uma posição angular ϕ_0 em relação ao eixo x .

Vamos considerar uma fonte circular de raio R , cujo

centro está localizado a uma distância s do centro da lente e cuja posição angular em relação ao eixo x é dada por ϕ_0 , conforme o diagrama da Fig. 8. O ângulo entre o vetor posição do centro da fonte \vec{s} e um vetor posição qualquer no plano das fontes $\vec{\beta}$ é dado por $\gamma = \phi - \phi_0$. Escrevemos a posição β de um ponto no círculo na forma $\beta = \beta_I + \beta_{II}$, como ilustrado na Fig. 8, de modo que β_I , s e a perpendicular a $\vec{\beta}$ que passa pelo centro do círculo formam um triângulo retângulo. Desse modo, é fácil ver que $\beta_I = s \cos \gamma = s \cos(\phi - \phi_0)$. Já β_{II} forma um triângulo retângulo com R e a perpendicular a $\vec{\beta}$ que passa pelo centro do círculo. Os lados desse triângulo são β_{II} e $s \sin \gamma = s \sin(\phi - \phi_0)$ e a hipotenusa é R . Assim, usando o teorema de Pitágoras, temos $\beta_{II}^2 = R^2 - s^2 \sin^2(\phi - \phi_0)$, de modo que há duas soluções para β_{II} e portanto para β :

$$\beta^\pm = s \cos(\phi - \phi_0) \pm \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2(\phi - \phi_0)}. \quad (23)$$

Note que há duas soluções pois para um dado valor de ϕ há dois valores de β correspondendo às partes externas e internas da circunferência em relação ao centro da lente. Essas partes se encontram onde a raiz se anula, ou seja, em $\phi = \phi_0 \pm \arcsen(R/s)$, o que define os extremos do círculo na coordenada angular ϕ . A extensão angular do círculo é $2 \arcsen(R/s)$.

Note que até aqui não utilizamos nenhum conceito do lenteamento gravitacional. Apenas escrevemos a expressão em coordenadas polares para um círculo fora da origem. Agora, vamos aplicar nessa expressão do círculo as soluções da equação da lente (Eqs. 20 e 21). Assim, obteremos a(s) imagens do círculo:

$$\theta_1^\pm = \theta_E + s \cos(\phi - \phi_0) \pm \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2(\phi - \phi_0)}, \quad (24)$$

$$\theta_2^\pm = \theta_E - s \cos(\phi - \phi_0) \pm \sqrt{R^2 - s^2 \sin^2(\phi - \phi_0)}. \quad (25)$$

A primeira é válida no intervalo $[\phi_0 - \arcsen(R/s), \phi_0 + \arcsen(R/s)]$ e a segunda no intervalo $[\phi_0 - \arcsen(R/s) + \pi, \phi_0 + \arcsen(R/s) + \pi]$. Essas soluções são mostradas na Fig. 9 para $R = 0.1\theta_E$, $s = 2R$ e $\phi_0 = 0$, juntamente com a fonte (em verde). A imagem da direita mostra a solução θ_1 e a da esquerda a solução θ_2 . As curvas azuis representam as partes com valor positivo nas raízes (θ^+), enquanto as curvas magenta mostram as partes com o sinal negativo na raiz.

A solução θ_1 representa o arco externo ao raio de Einstein e existe para qualquer valor de $s > R$, ou seja, se a fonte não contiver o centro da lente. Ela sempre terá uma forma arqueada, exceto quando $R \ll s$, em que ela parecerá um círculo. A imagem θ_2 aparece sempre dentro do raio de Einstein e sua forma pode variar

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

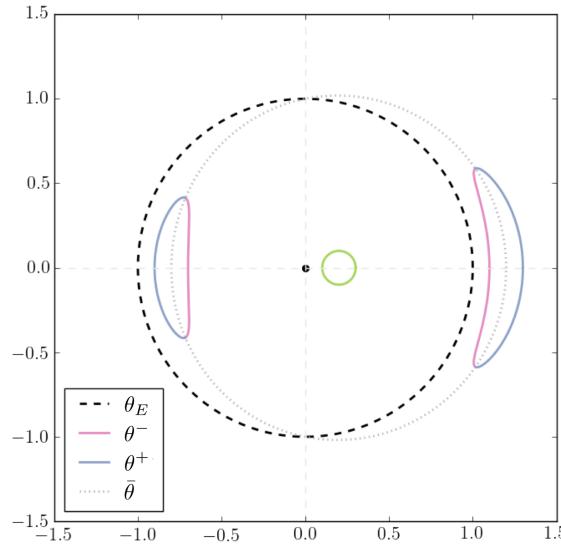


Figura 9: Imagens de uma fonte circular (mostrada em verde), de raio $R = 0.1\theta_E$ e localizada a uma distância $2R$ da origem, geradas por uma lente representada por uma esfera isotérmica singular. Os eixos estão mostrados em unidades do raio de Einstein θ_E .

de um arco, como na Fig. 9, quando a fonte está próxima ao centro da lente ($s \ll \theta_E$), até o formato de uma gota, quando ela está próxima ao raio de Einstein ($s \simeq \theta_E$). Quando parte da fonte cruza o raio de Einstein ($s > \theta_E - R$) a solução interna θ_2^- deixa de existir e θ_2^+ se anula nos extremos de variação de ϕ . A imagem fica com forma de gota, com o bico da gota localizado na origem. O maior valor de θ_2^+ ocorre em $\phi = \phi_0$ e este passa a ser negativo para $s \gtrsim \theta_E + R$, de modo que essa segunda imagem deixa de existir nessa situação. Para $s \leq R$, a fonte contém o centro da lente. Nesse caso, ϕ pode variar de 0 a 2π e as duas soluções (23) são a mesma ($\phi \rightarrow \phi + \pi$ são equivalentes). As imagens (24/24) formam curvas fechadas, uma fora (θ_1) e outra dentro (θ_2) do raio de Einstein, formando assim um *anel de Einstein*. Note portanto que não é preciso um alinhamento perfeito entre observador, lente e fonte para gerar um anel de Einstein a partir de fontes finitas. A situação limite ocorre para $s = R$, na qual as duas imagens se tocam em suas extremidades. No caso $s = 0$ é formado um anel perfeito de forma circular e centrado no centro da lente. Agora fica fácil entender a transição entre a situação de duas imagens e a formação do anel para fontes finitas: ao se aproximar da situação em que o anel é formado, arcos com extensão angular cada vez maior são formados, até serem fundidos formando um anel.

Na Fig. 10 mostramos a fonte em várias posições (qua-

dro superior), com as imagens resultantes (quadro inferior). Na medida em que a fonte se afasta da projeção do centro da lente, passamos pelas situações de anel de Einstein, duas imagens e uma única imagem. Recapitulando, as condições para a formação de cada tipo de imagem são:

- $s \leq R$: formação de um anel de Einstein
- $R < s < \theta_E + R$: duas imagens
- $s \geq \theta_E + R$: apenas uma imagem.

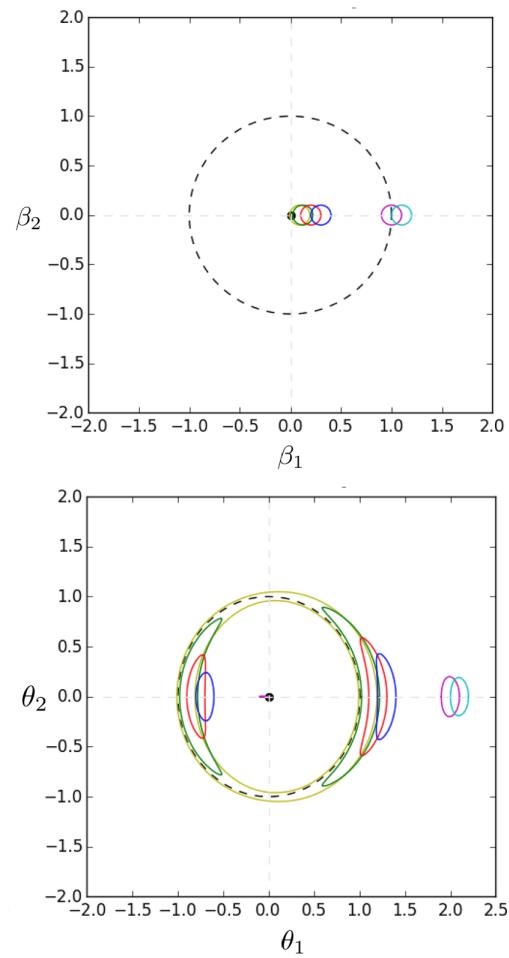


Figura 10: Esquerda: fontes circulares (de raio $R = 0.1\theta_E$) localizadas em diversas posições ao longo do eixo β_1 ($\phi_0 = 0$). Direita: imagens dessas fontes. A fonte que contém o centro da lente (mostrada em verde musgo) origina um anel de Einstein. A fonte externa ao raio de Einstein (em azul claro) possui apenas uma imagem. As demais fontes originam duas imagens, uma externa e outra interna ao raio de Einstein.

Note que a expressão de θ_1 em (24) admite dois intervalos de ϕ em que o argumento da raiz não se anula.

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

O primeiro corresponde efetivamente a θ_1 e o segundo corresponde à segunda imagem θ_2 , de modo que a solução completa para das duas imagens da fonte circular na esfera isotérmica singular pode ser escrita como na Eq. (24).

A curva média entre as partes interna e externa do arco (uma espécie de “espinha dorsal” do arco) é dada por

$$\bar{\theta} = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} = \theta_E + s \cos(\phi - \phi_0). \quad (26)$$

Essa curva é mostrada em pontilhado na Fig. 9. Note que ela independe do tamanho da fonte, sendo a mesma no caso de formação de anel de Einstein.

Nas discussões desta seção optamos por posicionar a fonte em uma orientação genérica ϕ_0 . No entanto, como a lente possui simetria axial, a posição angular da fonte pode ser escolhida arbitrariamente sem alterar a física do problema. Poderíamos, por exemplo, ter feito de partida $\phi_0 = 0$ para simplificar as expressões, sem nenhuma perda de generalidade.

A discussão das imagens de fontes circulares nos permitiu discutir alguns fenômenos de lentes, como a formação de arcos e anéis de Einstein, utilizando soluções muito simples. Basta escrever a solução da equação da lente para uma esfera isotérmica singular em coordenadas polares (Eqs. 20 e 21). A partir daí é trivial obter as soluções para qualquer fonte. Sugestão: faça o mesmo exercício desta seção, mas com uma fonte elíptica. Ela também permitirá uma solução relativamente simples e fornecerá arcos ainda mais realistas.

Como vimos, no caso de fontes finitas, não é necessário um alinhamento perfeito observador-lente-fonte para que seja gerada uma imagem na forma de anel. Basta com que o alinhamento seja aproximado. Neste caso é suficiente que algum ponto do disco que define a fonte passe pelo eixo da lente. Mesmo em situações em que a lente não possui simetria axial, é possível que a imagem gerada forme um anel completo. Basta que a fonte seja grande o bastante para incluir uma região relevante da lente, que para fontes não axialmente simétricas não é apenas o centro. Por isso, mesmo as lentes não sendo perfeitamente axiais e não ocorrendo um alinhamento perfeito, ainda é possível detectar centenas de anéis de Einstein na natureza.

6 DISCUSSÃO

Vimos que a medida da deflexão da luz durante o eclipse de 1919 (e em particular as medidas realizadas em Sobral) teve um papel crucial na aceitação da teoria da relatividade geral. Por coincidências históricas, a sucessão de fatos se deu de tal forma que o desvio da luz

só conseguiu ser medido após a previsão final de Einstein, de modo que esta se tornou uma previsão correta para a medida.

A deflexão da luz abre uma perspectiva para novos fenômenos, em particular para as lentes gravitacionais, cujas previsões teóricas foram sendo observadas sucessivamente nas últimas décadas. Esse novo campo possui aplicações nas mais diversas escalas astronômicas, desde planetas extrassolares até a estrutura em grande escala do Universo.

Através da abordagem desenvolvida nesta contribuição, foi possível atacar alguns exemplos de aplicações que podem ser estudados por meio de soluções analíticas muito simples. Em particular, foram obtidas soluções para imagens múltiplas, arcos gravitacionais e anéis de Einstein.

Devido a sua simplicidade e a seu fascínio, o assunto de lentes gravitacionais se torna um recurso didático atrativo, que permite treinar diversos conceitos matemáticos, incluindo a capacidade de abstração, visualização 3D, manipulações algébricas, cálculo vetorial, realização de gráficos, etc.

São poucos os problemas da física contemporânea que podem ser quantitativamente atacados com um ferramental acessível a alunos dos cursos iniciais de licenciatura e bacharelado nas áreas de ciências exatas, engenharias e afins a até a alunos avançados de ensino médio.

Combinada a abundância de aplicações práticas, a grande disponibilidade de belas imagens associadas ao fenômeno e a facilidade com que é possível tratar algumas aplicações, faz com que o tema de lentes seja ideal para explorar atividades complementares aos conteúdos formais dos cursos existentes. Até o momento praticamente não há material em português que trate o assunto de forma acessível para o público alvo mencionado. Esperamos com este artigo contribuir para preencher esta lacuna.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos organizadores deste volume celebrando os 100 anos do eclipse de Sobral pelo convite para redigir este artigo. Gostaria de agradecer a meus ex-alunos de pós-graduação Carlos Brandt, Clécio De Bom, Cristina Furlanetto, Gabriel Caminha, Habib Dúmet-Montoya, Maria E. S. Pereira, Pedro Ferreira e Vanessa de Freitas, junto com os quais aprendi e tive a oportunidade de explorar o maravilhoso mundo das lentes gravitacionais. Em particular, agradeço a Habib e Vanessa por permitirem reproduzir trechos de texto e figuras de suas teses de doutorado que foram adaptados para este artigo. Agradeço ao CNPq e à FAPERJ pelo

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL
financiamento de minhas pesquisas na área.

REFERÊNCIAS

- ALCOCK, C. *et al.* Possible gravitational microlensing of a star in the Large Magellanic Cloud. , v. 365, p. 621–623, out. 1993.
- BARNOTHY, J. *Quasars and the Gravitational Image Intensifier*. The Astronomical Journal, v. 70, p. 666, 1965.
- BINNEY, J.; Tremaine, S. *Galactic dynamics*. [S.l.: s.n.], 1987.
- BOND, I. A. *et al.* OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53: A Planetary Microlensing Event. , v. 606, p. L155–L158, maio 2004.
- CHWOLSON, O. *Regarding a possible from of double stars*. Astronomische Nachrichten, 221, p. 329, 1924.
- CORNELL, J.; LIGHTMAN, A. *Revealing the Universe: Prediction and Proof in Astronomy*. The MIT Press, 1983. ISBN 9780262530439. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=PEHXAAAACAAJ>>.
- DE FREITAS, V. P.; MAKLER, M.; Dúmet-Montoya, H. S. Strong lensing cross-sections for isothermal models. I. Finite source effects in the circular case. , v. 481, p. 2189–2204, dez. 2018.
- DODELSON, S. *Gravitational Lensing*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107129764. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=WE3ODgAAQBAJ>>.
- DYSON, F. W.; EDDINTON, A. S.; DAVIDSON, C. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, v. 220, p. 291–333, 1920.
- EDDINTON, A. S. *Space, time and gravitation. an outline of the general relativity theory*. [S.l.: s.n.], 1920.
- EINSENSTAEDT, J.; PASSOS VIDEIRA, A. A. A prova cearense das teorias de Einstein. *Ciência Hoje*, v. 20, dez. 1995.
- EINSTEIN, A. *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. Annalen der Physik, WILEY-VCH Verlag, v. 340, n. 10, p. 898–908, 1911. ISSN 1521-3889. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/andp.19113401005>>.
- _____. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik, v. 49, p. 771, 1916.
- _____. *Lens-Like Action of a Star by The Deviation of Light in The Gravitational Field*. Science, 84, p. 56, 1936.
- ELLIS, R. S. Gravitational lensing: a unique probe of dark matter and dark energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, v. 368, p. 967–987, fev. 2010.
- FOMALON, E.; KOPEIKIN, S.; LANYI, G.; BENSON, J. Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA. , v. 699, p. 1395–1402, Jul 2009.
- GOOBAR, A. *et al.* iPTF16geu: A multiply imaged, gravitationally lensed type Ia supernova. *Science*, v. 356, p. 291–295, abr. 2017.
- HEWITT et al., J. *Unusual radio source MG1131+0456 - A possible Einstein ring*. Nature, v. 333, p. 537–540, 1988.
- IRWIN et al., M. *Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event*. Astronomical Journal, v. 98, p. 1989–1994, 1989.
- JONES, B. F. Gravitational deflection of light: solar eclipse of 30 June 1973 II. Plate reductions. , v. 81, p. 455–463, jun. 1976.
- KELLY, P. L. *et al.* Multiple images of a highly magnified supernova formed by an early-type cluster galaxy lens. *Science*, v. 347, p. 1123–1126, mar. 2015.
- KENNEFICK, D. Not Only Because of Theory: Dyson, Eddington and the Competing Myths of the 1919 Eclipse Expedition. In: LEHNER, C.; RENN, J. (Ed.). *Einstein and the Changing World Views of Physics, 1905/2005*. [S.l.: s.n.], 2012. (International Conference on the History of General Relativity, v. 12), p. 201–232.
- LEBACH, D. E. *et al.* Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry. *Physical Review Letters*, v. 75, p. 1439–1442, ago. 1995.
- LYNDS, R.; PETROSIAN, V. *Giant Luminous Arcs in Galaxy Clusters*. Em Bulletin of the American Astronomical Society. v. 18, p. 1014, 1986.
- MAKLER, M. O Universo Visto Pelas Lentes Gravitacionais. *Ciência Hoje*, v. 264, p. 28–33, dez. 2009.

LENTES GRAVITACIONAIS: UM RICO RECURSO DIDÁTICO NA OCASIÃO DA CELEBRAÇÃO DOS 100 ANOS DO ECLIPSE DE SOBRAL

- MOLLERACH, S.; ROULET, E. *Gravitational Lensing and Microlensing*. World Scientific, 2002. ISBN 9789810248529. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PAErrkpBYG0C>>.
- MOREIRA, I. d. C.; VIDEIRA, A. A. P. *Einstein e o Brasil*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1995.
- PACZYNSKI, B. Gravitational microlensing by the galactic halo. , v. 304, p. 1–5, maio 1986.
- _____. Gravitational microlensing by the galactic halo. , v. 304, p. 1–5, maio 1986.
- PETTERS, A.; LEVINE, H.; WAMBSGANSS, J. *Singularity Theory and Gravitational Lensing*. Birkhäuser Boston, 2001. (Progress in Mathematical Physics). ISBN 9780817636685. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=H8Tece9FmQwC>>.
- QUIMBY, R. M.; OGURI, M. et al. Detection of the Gravitational Lens Magnifying a Type Ia Supernova. *Science*, v. 344, p. 396–399, abr. 2014.
- REFSDAL, S. On the possibility of determining Hubble’s parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect. , v. 128, p. 307, 1964.
- _____. The gravitational lens effect. , v. 128, p. 295, 1964.
- _____. On the possibility of determining the distances and masses of stars from the gravitational lens effect. , v. 134, p. 315, 1966.
- _____. On the possibility of testing cosmological theories from the gravitational lens effect. , v. 132, p. 101, 1966.
- RENN, J.; SAUER, T.; Stachel, J. The origin of gravitational lensing: a postscript to Einstein’s 1936 Science paper. *Science*, v. 275, p. 184–186, jan. 1997.
- SAHU, K. C. . et al. Relativistic deflection of background starlight measures the mass of a nearby white dwarf star. *Science*, v. 356, p. 1046–1050, jun. 2017.
- SCHMEIDLER, F. Interpretation of solar-limb light-deflection measurements. *Astronomische Nachrichten*, v. 306, p. 77–80, 1985.
- SCHMIDT, M. *3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift*. Nature, v. 197, p. 1040, 1963.
- SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. *Gravitational Lenses*. Springer, 1999. (Astronomy and Astrophysics Library). ISBN 9783540665069. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=sPAIgy9QGBsC>>.
- SOUCAIL et al., G. *A blue ring-like structure, in the center of the A 370 cluster of galaxies*. *Astronomy and Astrophysics*, v. 172, p. L14–L16, 1987.
- TISSERAND, P.; LE GUILLOU, L.; AFONSO, C. et al. Limits on the Macho content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds. , v. 469, p. 387–404, jul. 2007.
- TURNER, E. L.; OSTRIKER, J. P.; GOTTFRIED, J. R. The statistics of gravitational lenses - The distributions of image angular separations and lens redshifts. , v. 284, p. 1–22, set. 1984.
- WALSH, D.; CARSWELL, R.; WEYMANN, R. *0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens*. *Nature*, v. 279, p. 381–384, 1979.
- WILL, C. M. Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light. *American Journal of Physics*, v. 56, n. 5, p. 413–415, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.15622>>.
- ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, v. 6, p. 110–127, 1933.
- _____. Nebulae as Gravitational Lenses. *Physical Review*, v. 51, p. 290–290, fev. 1937.
- _____. On the Probability of Detecting Nebulae Which Act as Gravitational Lenses. *Physical Review*, v. 51, p. 679–679, abr. 1937.