

## USO DO MÉTODO DE GALERKIN NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM MEIO PARTICIPANTE

**Laurivan da Silva Diniz<sup>(1)</sup>**

Engenheiro Mecânico pela Universidade Federal da Paraíba – Campus II. Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba – Campus I. Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba – Campus I.

**Francisco Camilo da Silva<sup>(2)</sup>**

Licenciado em Matemática pela Universidade Regional do Cariri. Especialista em Matemática do Ensino Médio pela Universidade Regional do Cariri.

**Endereço<sup>(1)</sup>:** Rua José Amaro, 238 -Bugi - Iguatu - CE - CEP: 63500-000 - Brasil - Tel: (88) 3581-2869 - e-mail: [laurivansd@cefetce.br](mailto:laurivansd@cefetce.br)

**Endereço<sup>(2)</sup>:** Rua Geralda Feitosa, 32 -Triângulo – Juazeiro do Norte - CE - CEP: 63000-000 - Brasil - Tel: (88) 3571-5837 - e-mail: [camilo@cefetce.br](mailto:camilo@cefetce.br)

### RESUMO

A transferência de calor por radiação em meio participante, que absorve, emite e espalha radiação, ocorre em muitas aplicações de engenharia. A solução deste tipo de problema é bastante complexa, pois os resultados obtidos em qualquer ponto do sistema são influenciados pelos processos que ocorrem em todo o seu domínio. Devido às dificuldades matemáticas que envolvem a forma integro-diferencial da Equação da Transferência Radiativa (ETR) em meio participante, muitos métodos aproximados foram desenvolvidos e aplicados por diversos autores. No presente trabalho, o método de Galerkin será utilizado para resolver a equação da transferência radiativa em meio semitransparente com espalhamento anisotrópico da radiação. A solução do problema permite obter grandezas importantes para engenharia, como o divergente do fluxo de calor radiativo, o fluxo líquido de calor radiativo, a radiação incidente e a intensidade de radiação em qualquer ponto do meio. Os resultados obtidos serão comparados com os de outros métodos de solução.

**PALAVRAS-CHAVE:** Método de Galerkin, Meio Participante, Radiação Térmica, Radiação Incidente.

### INTRODUÇÃO

Quando a radiação térmica interage com um meio participante, o seu estudo se torna mais complexo por dois motivos. O primeiro deles é que num meio participante, a absorção, a emissão e o espalhamento da energia ocorrem em todas as localizações do meio, e inclusive nas fronteiras. Assim, a solução completa da mudança de energia requer o conhecimento da temperatura, da intensidade de radiação e das propriedades físicas em todos os pontos do meio. A emissão da radiação deixa de ser um fenômeno puramente superficial para ser um fenômeno volumétrico. A segunda dificuldade está na característica espectral da radiação que muda de um corpo para outro.

Segundo a teoria de Planck, a radiação atravessa o meio na forma de fótons (o fóton é a unidade básica da energia radiativa). A emissão da radiação decorre da liberação de fótons de energia, enquanto que na absorção ocorre a captura dos fótons pela partícula. Assim, a energia de uma partícula irá diminuir ou aumentar se esta estiver correspondentemente emitindo ou absorvendo fótons. Por outro lado, quando a radiação térmica interage com uma partícula, parte do feixe radiante é afastada da direção de propagação por espalhamento, o que pode provocar uma perda ou ganho parcial de energia.

Quando um meio participante (que absorve, emite e espalha a radiação térmica) líquido, sólido ou gasoso é submetido a altas temperaturas, a radiação é tão ou mais importante que a condução ou convecção no processo interno de transferência de calor. Assim, na determinação precisa do campo de temperatura transiente é indispensável o tratamento simultâneo dos modos de transferência de calor, pois, segundo Özişik (1973), a análise separada pode introduzir erros significativos nos resultados obtidos.

A determinação da influência da radiação no processo de transferência de calor requer a solução da Equação da Transferência Radiativa, de natureza integro-diferencial, que devido as complexidades físicas e matemáticas envolvidas, muitos métodos aproximados foram desenvolvidos, dentre os quais se pode destacar: o método  $F_N$  (Siewert et al, 1979), o método dos harmônicos esféricos (Benassi et al, 1983) e o método das ordenadas discretas (Fiveland, 1984).

No presente capítulo, o método de Galerkin, que foi usado por Cengel e Özişik (1984), será empregado para resolver a equação da transferência radiativa, possibilitando a determinação de grandezas de interesse prático como o divergente do fluxo de calor radiativo, o fluxo líquido de calor radiativo, a radiação incidente e a intensidade de radiação em qualquer ponto do meio. Os resultados obtidos são apresentados na forma de gráficos e tabelas onde são comparados com outros métodos de solução encontrados na literatura.

### MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA FÍSICO

Para aplicação do Método Galerkin considere inicialmente o problema radiativo em meio plano paralelo unidimensional, que absorve, emite e espalha anisotropicamente a energia térmica radiante, e está sujeito a fontes de radiação externa como ilustrado na figura 1. Para o estudo do problema será admitido que as propriedades radiativas como refletividade e emissividade são consideradas constantes e as superfícies de contorno são difusas na emissão e na reflexão.

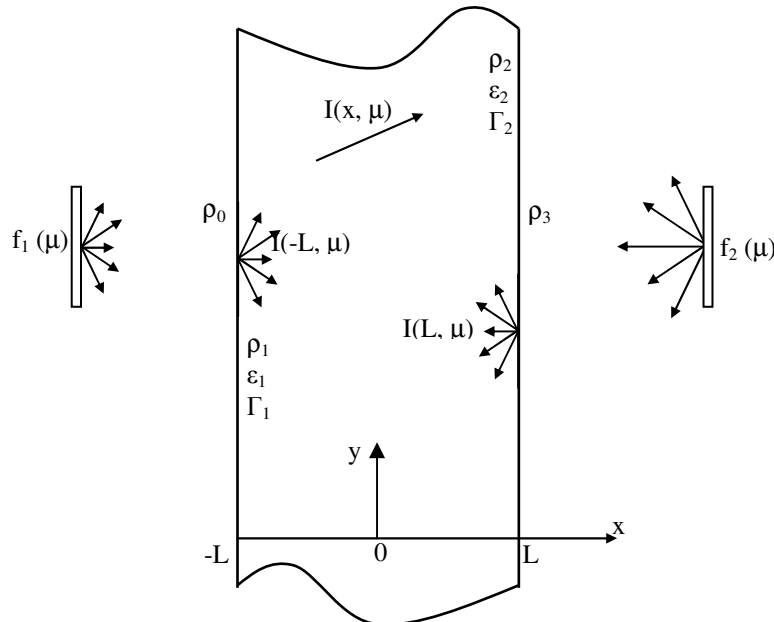


Figura 1: Sistema de coordenadas e geometria do problema.

onde  $\omega$  é o albedo para espalhamento simples,  $\mu$  é o cosseno do ângulo formado entre o eixo positivo dos  $x$  e a direção da intensidade de radiação,  $n$  é o índice de refração do meio,  $\rho_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ),  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ) representam respectivamente as refletividades e as emissividades das superfícies de contorno. As funções  $f_i(\mu)$  ( $i = 1, 2$ ) representam a intensidade da fonte de radiação externa que incidem sobre o corpo e  $I(x, \mu)$  é a intensidade de radiação.

No modelo matemático, as equações da transferência radiativa e condições de contornos na forma adimensional são expressas da seguinte forma:

$$\mu \frac{\partial \psi(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \psi(\tau, \mu) = S(\tau) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') \psi(\tau, \mu') d\mu', \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (1)$$

$$\psi^+(-\tau_0, \mu) = (1 - \rho_0) \cdot F_1(\mu) + \epsilon_1 \Theta_1^4 + 2\rho_1 \int_0^1 \psi^-(-\tau_0, -\mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0 \quad (2)$$

$$\Psi^-(\tau_0, -\mu) = (1 - \rho_3) \cdot F_2(\mu) + \varepsilon_2 \Theta_2^4 + 2\rho_2 \int_0^1 \Psi^+(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0 \quad (3)$$

Com  $p(\mu, \mu')$  representando a função de fase do espalhamento,  $\Theta_i$  ( $i=1, 2$ ) às temperaturas nas superfícies de contornos. O primeiro termo do lado direito da igualdade na equação (1), representa a energia radiativa emitida pelo corpo devido sua própria temperatura, onde  $\bar{\sigma}$  é a constante de Stefan-Boltzmann.

Na adimensionalização do problema foram utilizados os seguintes grupos e parâmetros adimensionais:

$$I(\tau, \mu) = \frac{n^2 \bar{\sigma} T_r^4}{\pi} \cdot \Psi(\tau, \mu) \quad f_i(\mu) = \frac{n^2 \bar{\sigma} T_r^4}{\pi} \cdot F_i(\mu) \quad (4.a-b)$$

$$G_n^*(\tau) = \frac{G_n(\tau)}{4n^2 \bar{\sigma} T_r^4} \quad \Theta(\tau, \xi) = \frac{T(x, t)}{T_r} \quad Q_R(\tau; \xi) = \frac{q_R(x; t)}{4n^2 \bar{\sigma} T_r^4} \quad (4.c-e)$$

As equações (1-3) são resolvidas formalmente em termos das componentes  $\Psi^+(\tau, \mu)$  e  $\Psi^-(\tau, \mu)$  para obter:

$$\Psi^+(\tau, \mu) = \Psi^+(-\tau_0, \mu) \cdot e^{-\frac{(\tau_0+\tau)}{\mu}} + \int_{-\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\mu} S(\tau', \mu) \cdot e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\mu}} d\tau' \quad (5)$$

$$\Psi^-(\tau, -\mu) = \Psi^-(\tau_0, -\mu) \cdot e^{-\frac{(\tau_0-\tau)}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{1}{\mu} S(\tau', -\mu) \cdot e^{-\frac{(\tau'-\tau)}{\mu}} d\tau' \quad (6)$$

A radiação incidente generalizada na forma adimensional é dada por:

$$G_n^*(\tau) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 P_n(\mu) \Psi^+(\tau, \mu) d\mu + (-1)^n \int_0^1 P_n(\mu) \Psi^-(\tau, -\mu) d\mu \right] \quad (7)$$

Substituindo as equações (5) e (6) em (7), e fazendo-se uso das condições de contorno do problema radiativo, resulta:

$$G_n^*(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) \cdot P_n(\mu) \cdot e^{-\frac{(\tau_0+\tau)}{\mu}} d\mu + \varepsilon_1 \Theta_1^4 J_n(\tau_0 + \tau) + 2\rho_1 K_1 J_n(\tau_0 + \tau) + \right. \\ \left. (-1)^n 2\rho_2 K_2 J_n(\tau_0 - \tau) + (-1)^n \varepsilon_2 \Theta_2^4 J_n(\tau_0 - \tau) + (-1)^n (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) \cdot P_n(\mu) \cdot e^{-\frac{(\tau_0-\tau)}{\mu}} d\mu + \right. \\ \left. + \int_0^{\tau} \int_{\mu}^{\tau} \frac{1}{\mu} P_n(\mu) \cdot e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\mu}} \cdot S(\tau', \mu) d\tau' d\mu + (-1)^n \int_0^{\tau} \int_{\mu}^{\tau} \frac{1}{\mu} P_n(\mu) \cdot e^{-\frac{(\tau'-\tau)}{\mu}} \cdot S(\tau', -\mu) d\tau' d\mu \right\} \quad (8)$$

onde foi definido que  $J_n(y) = \int_0^1 P_n(\mu) \cdot e^{-\frac{y}{\mu}} d\mu$  e:

$$K_1 = \beta^* \left\{ \alpha_2 (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) e^{-\frac{2\tau_0}{\mu}} d\mu + (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) e^{-\frac{2\tau_0}{\mu}} d\mu + \alpha_2 E_3(2\tau_0) \varepsilon_1 \Theta_1^4 + E_3(2\tau_0) \varepsilon_2 \Theta_2^4 + \right. \\ \left. \int_{-\tau_0}^{\tau_0} S(\tau') [E_2(\tau_0 + \tau') + \alpha_2 E_2(\tau_0 - \tau')] d\tau' + \omega \sum_{m=0}^M a_m \int_0^{\tau_0} G_m^*(\tau') [J_m(\tau_0 + \tau') + \alpha_2 J_m(\tau_0 - \tau')] d\tau' \right\} \quad (9)$$

$$K_2 = \beta^* \left\{ (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} \mu d\mu + \alpha_1 (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} \mu d\mu + \alpha_1 E_3(2\tau_0) \epsilon_2 \Theta_2^4 + E_3(2\tau_0) \epsilon_1 \Theta_1^4 + \int_{-\tau_0}^{\tau_0} S(\tau') [\alpha_1 E_2(\tau_0 + \tau') + E_2(\tau_0 - \tau')] d\tau' + \omega \sum_{m=0}^M a_m \int_{-\tau_0}^{\tau_0} G_m^*(\tau') [\alpha_1 J_m(\tau_0 + \tau') + J_m(\tau_0 - \tau')] d\tau' \right\} \quad (10)$$

Substituindo as equações (9) e (10) na equação (8) chega-se a:

$$G_n^*(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) \cdot e^{-\tau_0/\mu} \mu d\mu + \epsilon_1 \Theta_1^4 J_n(\tau_0 + \tau) + \alpha_1 \alpha_2 \beta^* \epsilon_1 \Theta_1^4 J_n(\tau_0 + \tau) + \alpha_1 \beta^* \epsilon_2 \Theta_2^4 J_n(\tau_0 + \tau) + 2\rho_1 \beta^* J_n(\tau_0 + \tau) \alpha_2 (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) \cdot e^{-2\tau_0/\mu} \mu d\mu + 2\rho_1 \beta^* J_n(\tau_0 + \tau) \cdot (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) \cdot e^{-2\tau_0/\mu} \mu d\mu + 2\rho_1 \beta^* J_n(\tau_0 + \tau) \int_{-\tau_0}^{\tau_0} S(\tau') [E_2(\tau_0 + \tau') + \alpha_2 E_2(\tau_0 - \tau')] d\tau' + (-1)^n (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) P_n(\mu) \cdot e^{-\tau_0/\mu} \mu d\mu + 2\rho_1 \beta^* J_n(\tau_0 + \tau) \omega \sum_{m=0}^M a_m \int_{-\tau_0}^{\tau_0} G_m^*(\tau') [(-1)^m J_m(\tau_0 + \tau') + \alpha_2 J_m(\tau_0 - \tau')] + (-1)^n \epsilon_2 \Theta_2^4 J_n(\tau_0 - \tau) + (-1)^n 2\rho_2 \beta^* J_n(\tau_0 - \tau) \cdot (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) \cdot e^{-2\tau_0/\mu} \mu d\mu + (-1)^n \alpha_2 \beta^* J_n(\tau_0 - \tau) \epsilon_1 \Theta_1^4 + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \beta^* \epsilon_2 \Theta_2^4 J_n(\tau_0 - \tau) + (-1)^n 2\rho_2 \beta^* J_n(\tau_0 - \tau) \alpha_1 (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) \cdot e^{-2\tau_0/\mu} \mu d\mu + (-1)^n 2\rho_2 \beta^* J_n(\tau_0 - \tau) \int_{-\tau_0}^{\tau_0} S(\tau') [\alpha_1 E_2(\tau_0 + \tau') + E_2(\tau_0 - \tau')] d\tau' + (-1)^n 2\rho_2 \beta^* J_n(\tau_0 - \tau) \omega \sum_{m=0}^M a_m \int_{-\tau_0}^{\tau_0} G_m^*(\tau') [(-1)^m \alpha_1 J_m(\tau_0 + \tau') + J_m(\tau_0 - \tau')] + \int_0^1 \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{1}{\mu} P_n(\mu) \cdot e^{-\tau/\mu} S(\tau', \mu) d\tau' d\mu + (-1)^n \int_0^1 \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{1}{\mu} P_n(\mu) \cdot e^{-\tau'/\mu} S(\tau', -\mu) d\tau' d\mu \right\} \quad (11)$$

onde foi definido que:

$$\alpha_1 = 2\rho_1 E_3(2\tau_0) \text{ e } \alpha_2 = 2\rho_2 E_3(2\tau_0) \quad (12-a,b)$$

$$E_n(z) = \int_0^1 \eta^{n-2} \cdot e^{-z/\eta} d\eta \text{ e } \beta^* = \frac{1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \quad (12-c,d)$$

A equação (11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$G_n^*(\tau) = Y_n(\tau) + \omega \sum_{m=0}^M \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K_{mn}(\tau, \tau') \cdot G_m^*(\tau') d\tau' \quad (13)$$

$$\text{ou } \mathfrak{S}\{G_n^*(\tau)\} = 0 \quad (14)$$

onde  $\mathfrak{S}$  caracteriza todas as operações matemáticas que aparecem na equação (4.34) e os termos  $K_{mn}(\tau, \tau')$  e  $Y_n(\tau)$  são definidos respectivamente por:

$$K_{mn}(\tau, \tau') = a_m \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\mu} P_m(\mu) P_n(\mu) \cdot \mu \cdot e^{-|\tau-\tau'|/\mu} d\mu + \rho_1 \beta^* J_n(\tau_0 + \tau) [(-1)^m J_m(\tau_0 + \tau') + \alpha_2 J_m(\tau_0 - \tau')] + \rho_2 \beta^* J_n(\tau_0 - \tau) [\alpha_1 E_2(\tau') + E_2(\tau_0 - \tau')] (-1)^n \right\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 Y_n(\tau) = & \frac{1}{2} \left\{ 2 \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K_{0n}(\tau, \tau') S(\tau') d\tau' + \beta^* \varepsilon_1 \Theta_1^4 [J_n(\tau_0 + \tau) + (-1)^n \alpha_2 J_n(\tau_0 - \tau)] + \right. \\
 & \beta^* \varepsilon_2 \Theta_2^4 [\alpha_1 J_n(\tau_0 + \tau) + (-1)^n J_n(\tau_0 - \tau)] + (1 - \rho_0) \int_0^1 P_n(\mu) F_1(\mu) e^{-\tau_0/\mu} d\mu + \\
 & 2\rho_2 \beta^* [\alpha_1 J_n(\tau_0 + \tau) + (-1)^n J_n(\tau_0 - \tau)] (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} d\mu + \\
 & 2\rho_1 \beta^* [J_n(\tau_0 + \tau) + (-1)^n \alpha_2 J_n(\tau_0 - \tau)] (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} d\mu + \\
 & \left. (-1)^n (1 - \rho_3) \int_0^1 P_n(\mu) F_2(\mu) e^{-\tau_0/\mu} d\mu \right\}
 \end{aligned} \tag{16}$$

com o valor de  $r$  definido por:

$$r = \begin{cases} 1 & \text{para } \tau' < \tau \\ (-1)^{m+n} & \text{para } \tau' > \tau \end{cases} \tag{17}$$

O problema descrito pelas equações (1-3) fica reduzido à solução da equação integral (13) para a função  $G_n^*(\tau)$ , que é representada em termos de polinômios de Legendre na variável óptica,  $\tau$ , conforme Cengel (1984), ou seja:

$$G_n^*(\tau) = \sum_{k=0}^K c_{nk} P_k\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad \text{e} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \tag{18}$$

Onde  $c_{nk}$  são os coeficientes de expansão a serem determinados. Uma vez conhecidos esses coeficientes, as intensidades de radiação, a radiação incidente, fluxo de calor radiativo e o divergente do fluxo de calor radiativo são determinados em qualquer ponto do meio a partir de suas definições formais.

O método de Galerkin aplicado à equação (14) com  $G_n^*(\tau)$  dada pela equação (18) vai resultar:

$$[b_{mkl}] \{c_{mk}\} = \{d_{nl}\} \tag{19}$$

sendo a matriz dos coeficientes  $b_{mkl}$  e o vetor coluna  $d_{nl}$  definidos respectivamente por:

$$b_{mkl} = \frac{2\tau_0}{2k+1} \delta_{mn}^{kl} - \omega a_m \left\{ \frac{1}{2} T_{mkl} + \beta^* T_{nl} T_{mk} [(-1)^m \rho_1 + (-1)^{n+l+k} \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 \langle (-1)^k + (-1)^{m+n+l} \rangle] \right\} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 2d_{nl} = & 2 \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} S(\tau') K_{0n}(\tau, \tau') P_l\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) d\tau d\tau' + (1 - \rho_0) R_{nl} + (-1)^n (1 - \rho_3) R_{nl}^* + \\
 & \left\{ \varepsilon_1 \Theta_1^4 [1 + (-1)^{l+n} \alpha_2] + \varepsilon_2 \Theta_2^4 [\alpha_1 + (-1)^{l+n}] \right\} \beta T_{nl} + 2\rho_2 \beta T_{nl} [\alpha_1 + (-1)^{l+n}] (1 - \rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} d\mu + \\
 & 2\rho_1 \beta T_{nl} [1 + (-1)^{l+n} \alpha_2] (1 - \rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} d\mu
 \end{aligned} \tag{21}$$

Nas equações (20) e (21) aparecem os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 R_{nl} = & \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_0^1 P_n(\mu) P_l\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) F_1(\mu) e^{-\tau_0/\mu} d\mu d\tau \\
 = & \sum_{v=0}^l \frac{(l+v)!}{(2\tau_0)^v v!(l-v)!} \left[ (-1)^{l+v} \int_0^1 \mu^{v+1} P_n(\mu) F_1(\mu) d\mu - \int_0^1 \mu^{v+1} P_n(\mu) F_1(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} d\mu \right]
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} R_{nl}^* &= \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_0^1 P_n(\mu) P_1\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) F_2(\mu) e^{-\tau_0/\mu} d\mu d\tau \\ &= \sum_{v=0}^1 \frac{(1+v)!}{(2\tau_0)^v v!(1-v)!} \left[ (-1)^v \int_0^1 \mu^{v+1} P_n(\mu) F_2(\mu) d\mu - (-1)^1 \int_0^1 \mu^{v+1} P_n(\mu) F_2(\mu) e^{-2\tau_0/\mu} d\mu \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_{mnl} &= \int_0^{\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_0^1 \frac{1}{\mu} P_m(\mu) P_n(\mu) r e^{-|\tau-\tau'|/\mu} P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) P_l\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) d\tau' d\tau d\mu = \\ & \left[ (-1)^{n+m} + (-1)^{k+l} \right] \sum_{v=0}^k \frac{1}{(2\tau_0)^v} \left\{ \tau_0 [1 + (-1)^{1+k+v}] \sum_{i=0}^{[l/2]} h_i (1-2i)! \right. \\ & \times \sum_{j=0}^{k-v} \frac{(-1)^j (v+k+j)!}{2^j (v+j)! (k-v-j)! (1-2i+j+1)!} \sum_{s=0}^{[n/2]} h_s S_{m,v+n-2s} - \frac{(k+v)!}{v!(k-v)!} \\ & \left. \times \sum_{i=0}^1 \frac{(1+i)!}{(2\tau_0)^i i!(1-i)!} \sum_{s=0}^{[n/2]} h_s \times [(-1)^i S_{m,v+i+n-2s+1} - (-1)^1 S_{m,v+i+n-2s+1}^* (2\tau_0)] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$T_{ij} = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_0^1 P_i(\mu) P_j\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{-\tau_0/\mu} d\mu d\tau = \sum_{v=0}^j \frac{(j+v)!}{(2\tau_0)^v v!(j-v)!} [(-1)^{j+v} S_{i,v+1} - S_{i,v+1}^* (2\tau_0)] \quad (25)$$

$$S_{n,i} = \int_0^1 \mu^i P_n(\mu) d\mu = \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)\cdots(i+2-n)}{(i+n+1)(i+n-1)(i+n-3)\cdots(i+3-n)} \quad (26)$$

$$S_{n,i}^* (y) = \int_0^1 \mu^i e^{-y/\mu} P_n(\mu) d\mu = \sum_{j=0}^{[n/2]} h_j E_{n+i-2j+2} (y) \quad (27)$$

Fazendo-se uso dos coeficientes de expansão  $c_{nk}$  determinados pela expressão (19), as componentes da intensidade de radiação  $\psi^+(\tau, \mu)$  e  $\psi^-(\tau, \mu)$ , as componentes do fluxo de calor radiativo  $Q_r^+(\tau)$  e  $Q_r^-(\tau)$  e a radiação incidente são determinadas respectivamente por:

$$\psi^+(\tau, \mu) = \left[ (1-\rho_0) F_1(\mu) + \varepsilon_1 \Theta_1^4 + 2\rho_1 K_1 \right] \cdot e^{-\tau_0/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{-\tau_0}^{\tau} S(\tau') \cdot e^{-\tau'/\mu} d\tau' + \omega \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K a_n c_{nk} \frac{1}{\mu} P_n(\mu) V_k(\tau, \mu) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi^-(\tau, -\mu) &= \left[ (1-\rho_3) F_2(\mu) + \varepsilon_2 \Theta_2^4 + 2\rho_2 K_2 \right] \cdot e^{-\tau_0/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} S(\tau') \cdot e^{-\tau'/\mu} d\tau' + \\ & \omega \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K (-1)^n a_n c_{nk} \frac{1}{\mu} P_n(\mu) V_k^*(\tau, \mu) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q_r^+(\tau) &= \frac{1}{2} \left\{ (1-\rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) e^{-\tau_0/\mu} \mu d\mu + (\varepsilon_1 \Theta_1^4 + 2\rho_1 K_1) E_3(\tau_0 + \tau) + \right. \\ & \left. \int_{-\tau_0}^{\tau} S(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' + \omega \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K a_n c_{nk} W_{nk}(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} Q_r^-(\tau) &= \frac{1}{2} \left\{ (1-\rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) e^{-\tau_0/\mu} \mu d\mu + (\varepsilon_2 \Theta_2^4 + 2\rho_2 K_2) E_3(\tau_0 - \tau) + \right. \\ & \left. \int_{\tau}^{\tau_0} S(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau' + \omega \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K (-1)^n a_n c_{nk} W_{nk}^*(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$G_n^*(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ (1-\rho_0) \int_0^1 F_1(\mu) \cdot e^{-\tau_0+\tau/\mu} d\mu + [\varepsilon_1 \Theta_1^4 + 2\rho_1 K_1] E_2(\tau_0 + \tau) + (1-\rho_3) \int_0^1 F_2(\mu) \cdot e^{-\tau_0-\tau/\mu} d\mu + \right. \\ \left. [\varepsilon_2 \Theta_2^4 + 2\rho_2 K_2] E_2(\tau_0 - \tau) + \int_{-\tau_0}^{\tau_0} S(\tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' + \omega \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K a_n c_{nk} Z_{nk}(\tau) \right\} \quad (32)$$

Onde foram definidos que:

$$V_k(\tau, \mu) = \int_{-\tau_0}^{\tau} P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) e^{-\tau'/\mu} d\tau' = \sum_{v=0}^k \frac{\mu^{v+1}}{\tau_0^v} \left[ (-1)^v (2v-1)!! C_{k-v}^{v+1/2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - (-1)^k \frac{(k+v)!}{2^v v!(k-v)!} e^{-\tau_0+\tau/\mu} \right] \quad (33)$$

$$V_k^*(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{\tau_0} P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) e^{-\tau'/\mu} d\tau' = \sum_{v=0}^k \frac{\mu^{v+1}}{\tau_0^v} \left[ (2v-1)!! C_{k-v}^{v+1/2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{(k+v)!}{2^v v!(k-v)!} e^{-\tau_0-\tau/\mu} \right] \quad (34)$$

$$W_{nk}(\tau) = \int_{-\tau_0}^{\tau} \int_0^1 P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) P_n(\mu) e^{-\tau'/\mu} d\mu d\tau' \\ = \sum_{v=0}^k \frac{1}{\tau_0^v} \left[ (-1)^v (2v-1)!! C_{k-v}^{v+1/2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) S_{n,v+1} - (-1)^k \frac{(k+v)!}{2^v v!(k-v)!} S_{n,v+1}^*(\tau_0 + \tau) \right] \quad (35)$$

$$W_{nk}^*(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} \int_0^1 P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) P_n(\mu) e^{-\tau'/\mu} d\mu d\tau' = \sum_{v=0}^k \frac{1}{\tau_0^v} \left[ (2v-1)!! C_{k-v}^{v+1/2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) S_{n,v+1} - \frac{(k+v)!}{2^v v!(k-v)!} S_{n,v+1}^*(\tau_0 - \tau) \right] \quad (36)$$

$$Z_{nk}(\tau) = \int_0^1 \frac{1}{\mu} P_n(\mu) \left[ \int_{-\tau_0}^{\tau} P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) e^{-\tau'/\mu} d\tau' + (-1)^n \int_{-\tau_0}^{\tau} P_k\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) e^{-\tau'/\mu} d\tau' \right] d\mu \\ \sum_{v=0}^k \frac{1}{\tau_0^v} \left\{ [(-1)^n + (-1)^v] (2v-1)!! C_{k-v}^{v+1/2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) S_{n,v} - \right. \\ \left. \frac{(k+v)!}{2^v v!(k-v)!} [(-1)^k S_{n,v}^*(\tau_0 + \tau) + (-1)^n S_{n,v}^*(\tau_0 - \tau)] \right\} \quad (37)$$

e:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]} h_i x^{n-2i} \quad \text{Polinômios de Legendre} \quad (38)$$

$$h_i = \frac{(-1)^i (2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!} \quad e \quad [n/2] = \begin{cases} n/2 & \text{para } n \text{ par} \\ (n-1)/2 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (39)$$

$$C_{n-m}^{m+1/2}(x) = \text{Polinômio de Gegenbauer} \\ = \frac{1}{\Gamma(m+1/2)} \sum_{i=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^i \Gamma(n+1/2-i)}{i!(n-m-2i)!} (2x)^{n-m-2i} \quad (40)$$

Os coeficientes  $a_n$  estão relacionados à função de fase do espalhamento da radiação. A determinação completa da função de fase, de acordo com Özişik (1973) é bastante laboriosa, pois requer que sejam feitos cálculos para um grande número de ângulos de espalhamento. Por isso, Chu e Churchill (1955) expressaram a função de fase em termos de polinômios de Legendre da seguinte forma:

$$p_v(\mu_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(\mu_0), \quad a_0 = 1 \quad (41)$$

onde  $P_j(\mu_0)$  é o polinômio de Legendre de ordem  $j$  e argumento  $\mu_0$ , e  $a_j$  são os coeficientes de expansão determinados a partir das equações de Mie (para o caso de partículas em forma de esfera), sendo função somente do diâmetro e do índice de refração das partículas. Para efeito de comprovação da eficácia do método empregado neste trabalho, as simulações serão feitas usando as leis de espalhamento dadas na tabela 1 (Lee e Buckius, 1982).

**Tabela 1: Coeficiente para expansão da Função de Fase.**

$a_j$	Função de Fase					
	F1	F2	F3	B1	B2	B3
$a_0$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$a_1$	1.0	1.5	1.98398	-1.0	1.0	-0.56524
$a_2$		0.5	1.50823		1.0	0.29783
$a_3$			0.70075		-0.75	0.08571
$a_4$			0.23489			0.01003
$a_5$			0.05133			0.00063
$a_6$			0.00760			
$a_7$			0.00048			

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

As equações algébricas resultantes foram resolvidas por meio de código computacional escrito em linguagem Fortran, utilizando o software FORTRAN POWERSTATION 4.0. Como aplicação considerou-se um corpo plano unidimensional com contornos transparentes, sujeito a uma fonte de radiação externa isotrópica de intensidade unitária aplicada na superfície de contorno  $\tau=-\tau_0$ , isto é,  $F_1(\mu)=1$ . A radiação emitida pelo corpo devido a sua própria temperatura é desprezível quando comparada com  $F_1(\mu)$ , e a fonte de radiação externa,  $F_2(\mu)$  é nula.

Na figura (2) é apresentado o efeito que a espessura óptica exerce na refletância de um corpo puramente difusor ( $\omega=1.0$ ) para dois tipos de função de fase (B2 e F2). Pode-se perceber além da forte concordância dos resultados obtidos que a refletância aumenta para valores crescentes de  $\tau_0$ .

A Figura (3) mostra a influência que a função de fase do espalhamento exerce no fluxo líquido de calor radiativo para um corpo com superfícies de contorno negras, sujeito a uma fonte externa de radiação difusa e intensidade unitária, aplicada na posição  $\tau=-\tau_0$ . Na simulação foram considerados diferentes valores para o albedo e espessura óptica como indicados nas respectivas figuras. Pode-se perceber que os resultados obtidos apresentam forte concordância com a solução exata apresentada por Lee e Buckius (1982).

A Tabela (2) mostra os resultados obtidos para radiação incidente na superfície de contorno ( $\tau=\tau_0$ ) para um corpo conservativo ( $\omega=1.0$ ) cinzento, que espalha radiação isotropicamente. No estudo é verificada a influência da espessura óptica do corpo sobre essa grandeza. As propriedades radiativas e as temperaturas de cada parede estão especificadas nas próprias tabelas. Os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com a solução exata de Heaslet e Warming (1965), e com os resultados de Fiveland (1987) que resolveu o problema pelo método das diferenças finitas associado ao método das ordenadas discretas e os obtidos por Oliveira (2004) que utilizou o método das ordenadas discretas. Uma análise dos resultados mostra que, com poucos termos de expansão, o método de Galerkin mostra forte concordância com os outros métodos apresentados.



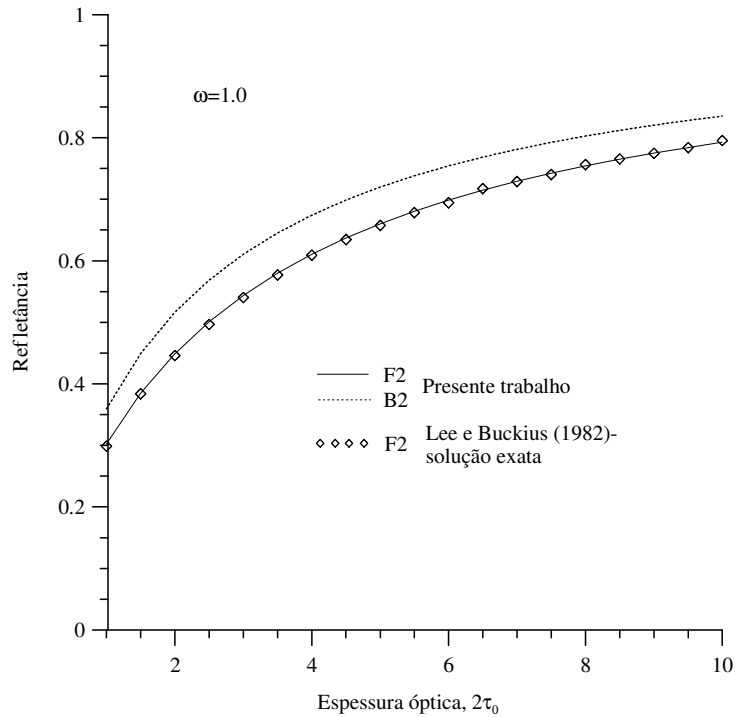


Figura 2: Refletância versus espessura óptica do corpo

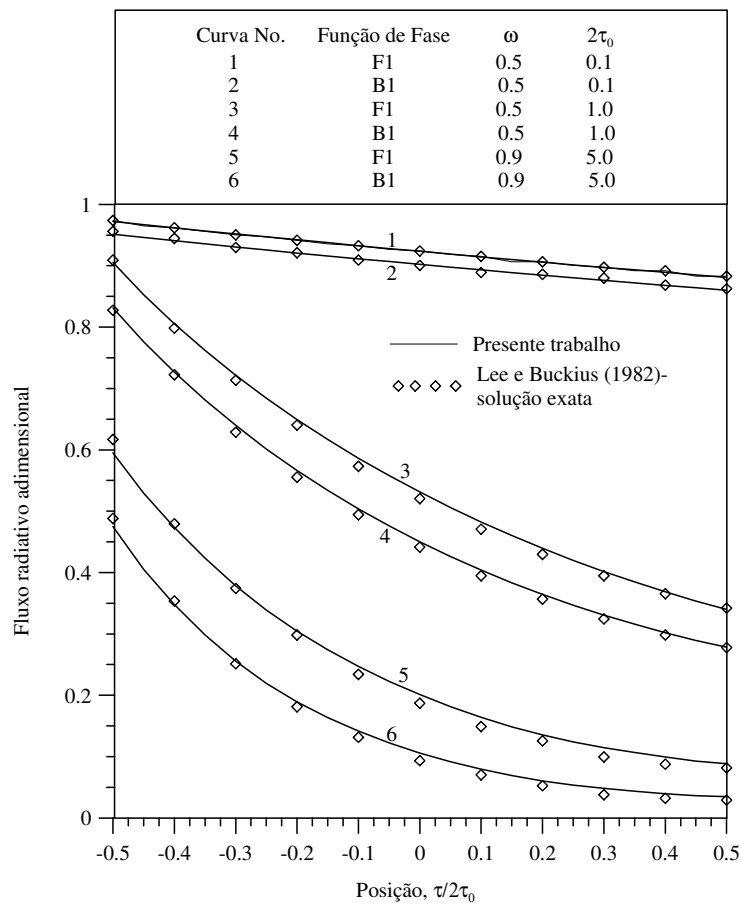


Figura 3: Efeito da função de fase no fluxo de calor radiativo adimensional.

$\omega = 1.0 \quad \theta_1 = 1.0 \quad \theta_2 = 0.0 \quad \rho_1^d = 0.2$								
$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\tau_0$	Radiação incidente $G(\tau_0)$				Pres. Trabalho	Sol. Exata
			Fiveland		Oliveira			
			G6	S6	S <sub>12</sub>	G <sub>300</sub>		
0.8	1.0	0.1	1.4440	1.4110	1.3946	1.3963	1.3963	1.3965
		1.0	0.8660	0.8558	0.8500	0.8499	0.8499	0.8499
		3.0	0.5031	0.4912	0.4860	0.4861	0.4861	0.4861
	0.5	0.1	2.5640	2.5172	2.5068	2.5080	2.5080	2.5080
		1.0	1.9140	1.8832	1.8804	1.8801	1.8803	1.8801
		3.0	1.2880	1.2668	1.2558	1.2558	1.2558	1.2558
	0.1	0.1	3.7420	3.6628	3.6618	3.6622	3.6621	3.6622
		1.0	3.5212	3.4120	3.4140	3.4138	3.4140	3.4138
		3.0	3.1520	3.0000	3.0030	3.0029	3.0030	3.0029

## CONCLUSÕES

Como pode ser observado através dos resultados obtidos, o método de Galerkin, empregado para resolver a Equação da Transferência Radiativa, permite determinar de forma rápida, sistemática e precisa, resultados de grandezas físicas de interesse prático da engenharia, como distribuição angular da intensidade de radiação, fluxo líquido de calor radiativo e a radiação incidente em qualquer ponto do meio sem que seja preciso alterar a formulação original do problema. Por isso, pode-se concluir que o método de Galerkin é uma alternativa computacional para resolver a ETR em problemas acoplados condução-radiação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ÖZİŞİK, M. N., 1973, Radiative Transfer and Interactions with Conductions and Convection, Ed. John Wiley and Sons, New York.
2. SIEWERT, C. E., MAIORINO, J. R. and ÖZİŞİK, M. N., 1979, "The Use of the FN Method for Radiative Transfer Problems with Reflective Boundary Conditions", Journal Quant. Spectrosc. Radiative Transfer, Vol. 23, pp. 565-573.
3. BENASSI, M., COTTA, R. M. and SIEWERT, C. E., 1983, "The PN Method for Radiative Transfer Problems with Reflective Boundary Conditions", Journal Quant. Spectrosc. Radiative Transfer, Vol. 30, No. 6, pp. 547-553.
4. FIVELAND, W. A., 1984, "Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport for Rectangular Enclosures", Trans. ASME-Journal of Heat Transfer, Vol. 106, pp. 669-706.
5. CENGEL, Y. A. and ÖZİŞİK, M. N., 1984, "The Use of the Galerkin Method for Radiation Transfer in an Anisotropically Scattering Slab with Reflecting Boundaries", Journal Quant. Spectrosc. Radiative Transfer, Vol. 32, No. 3, pp. 225-233.
6. CENGEL, Y. A., 1984, Radiative Transfer in Plane-Parallel Inhomogeneous Media and Solar Ponds, Thesis of Doctor of Philosophy, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Graduate Faculty of North Carolina State University.
7. CHU, CHIAO-MIN and CHURCHILL, S. W., 1955, "Representation of the Angular Distribution of Radiation Scattered by a Spherical Particle", J. Opt. Soc. Am., Vol. 45, pp. 958-962.
8. LEE, H. and BUCKIUS, R. O., 1982, "Scaling Anisotropic Scattering in Radiation Heat Transfer for a Planar Medium", Trans. ASME-Journal of Heat Transfer, Vol. 104, pp. 68-75.
9. HEASLET, M. and WARMING, R., 1965, "Radiative Transfer and Wall Temperature Slip in an Absorbing Planar Medium", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 8, pp. 979-994.
10. FIVELAND, W. A., 1987, "Discrete Ordinate Methods for Radiative Heat Transfer in Isotropically and Anisotropically Scattering Media", Trans. ASME-Journal of Heat Transfer, Vol. 109, pp. 809-812.
11. OLIVEIRA, J. V. L., 2004, Análise da Transferência de Calor para o Acoplamento Condução-Radiação em um Meio Absorvedor, Emissor e Difusor: Aplicação aos Materiais Cerâmicos, Tese de D.Sc., CPGEM/UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.