UMA SEQUENCIA DE ENSINO PARA A AQUISIÇÃO DO CONCEITO DE DERIVADAS PARCIAIS, DIRECIONAIS E *TEOREMAS* CORRELATOS NO CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS

Francisco Regis Vieira Alves[(1)]
Licenciado e Bacharel pele Universidade Federal do Ceará, Mestre em Matemática Pura e Mestre em Educação pela Universidade Federal do Ceará – UFC e doutorando em Educação pela UFC.

Hermínio Borges Neto (Orientador) - hermínio@ufc.br
Doutor em Matemática e Pós-doutor em Educação Matemática, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Educação Brasileira – Faculdade de Educação/UFC.

Rosélia Costa de Castro Machado (Co-orientadora) - rosélia@ufc.br
Doutora em Educação, professora do departamento de Educação – UFC.

Endereço[(1)]**:** Rua Passa Tempo, 176 - Carmo-Sion - Belo Horizonte - MG - CEP: 30310-760 - Brasil - Tel: (31) 225-9518 - e-mail: fregis@etfce.br

RESUMO

Desenvolvemos um estudo *exploratório*, com a obtenção direta dos *dados descritivos* no ambiente natural onde se concretiza o ensino de matemática com a participação direta do pesquisador, com o objetivo de *descrever a aquisição do conceito de derivadas parciais e direcionais de funções* $z = f(x, y)$ *simbolizadas por* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$. Desde que em tal aquisição temos a necessidade de promover a utilização do *raciocínio intuitivo* e *lógico* do aluno, analisamos também a compreensão de alguns *teoremas* relacionados. Antes de iniciar a *observação participante*, no segundo semestre de 2006, com os alunos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica – CEFET em Juazeiro do Norte, desenvolvemos um extenso *levantamento documentário* respeitando as etapas previstas por Bervian e Cervo (2003). Nesta fase do estudo identificamos elementos de natureza epistemológica, histórica e metodológica presentes nos livros didáticos que pudessem funcionar como obstáculos epistemológicos para os conteúdos há pouco citados. Após a finalização deste momento, passamos para as situações de *observação*, nas quais desenvolvemos atividades baseadas em pressupostos didático-metodológicos da *Seqüência Fedathi – SF*. Desde que a *SF* se aplica às situações de experimentação e recriação em determinados aspectos, do ambiente de trabalho do matemático profissional, decidimos por sua escolha como metodologia de ensino, integrada às formulações de Perminov (1988), na caracterização dos elementos cognitivos mobilizados em situações-problema que requerem o *raciocínio intuitivo* dos sujeitos.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Cálculo, Raciocínio intuitivo-lógico, Derivadas,

INTRODUÇÃO: AS DIFICULDADES INERENTES AO APRENDIZADO DE DERIVADAS PARCIAIS, DIRECIONAIS E TEOREMAS RELACIONADOS

O texto para um estudo inicial de *Cálculo Diferencial e Integral* em várias variáveis não pode apresentar o mesmo tipo de discurso que é encontrado em um *paper* produzido por um matemático, que preserva uma linguagem cifrada.

Pesquisas indicam (AMIT & VINNER, 1990, *apud* MEYER, 2003, pg. 5) que os índices de aprendizagem são satisfatórios em tarefas de caráter *operatório*, e menos satisfatórios em tarefas que exigem habilidades *conceituais*.

Segundo Meyer (2003, pg. 5), estes e outros aspectos reforçam a idéia de que existem diferentes tipos de conhecimento matemático: um deles relacionado à compreensão dos conceitos, e o outro, aos procedimentos adotados para resolver tarefas matemáticas.

Referendado por nossa experiência, sentimos a predileção dos estudantes pela resolução procedimental e algorítmica. Além disso, em vários livros didáticos, ocorre a valorização do caráter operatório do conhecimento, em detrimento do conceitual.

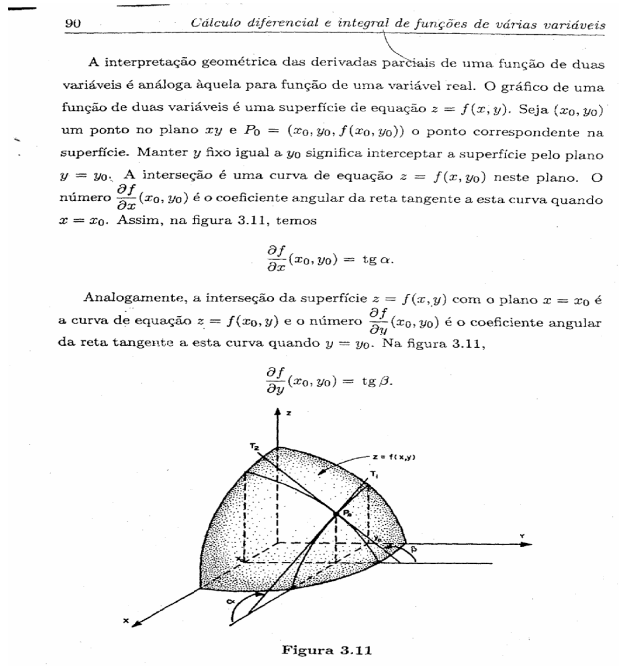
César (2001, pg. 12) faz referência às duas formas predominantes de abordagens em livros de Cálculo. A primeira se caracteriza pela substituição da apresentação deste assunto por meio das *definições* e *teoremas*. A segunda carregada de malabarismos algébricos que carecem de sentido.

Um problema específico apontando por este e outros estudos é a tendência dos livros que desenvolvem a noção de *derivada*, e só depois é que vemos ser apresentado e trabalhado à noção de *taxa de variação*.

O entendimento da *taxa de variação* proporcionará ao aluno compreender e prever o comportamento da função em uma variável real. Por outro lado, a transição para o cálculo em várias variáveis e a interpretação do mesmo fenômeno é eficazmente estimulada pelo livro? Varias dificuldades podem ser evitadas quando temos uma perfeita transição do Cálculo I para o Cálculo III. Por exemplo, a compreensão das ligações conceituais entre a *derivada* de funções $y = f(x)$ e $z = f(x, y)$ ou $w = f(x, y, z)$. Nesta transição, vemos um aumento significativo das *notações*, procedimentos sofisticados, *definições* epistemologicamente complexas.

Estes aspectos poderiam merecer melhor atenção por parte dos autores de livros de Cálculo. Mas vejamos o caso de uma obra de Pinto (2004). Na seção destinada à interpretação geométrica da *derivada parcial*, a intenção é muito boa, contudo, percebemos a inversão na apresentação dos conteúdos.

Ou melhor, dizendo, o percurso seguido pela autora pode ser descrito: $notação \rightarrow sentido$. De fato, após a apresentação da *definição*, vemos a seguinte descrição do procedimento geral de obtenção do *objeto*.



90 *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis*

A interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função de duas variáveis é análoga àquela para função de uma variável real. O gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície de equação $z = f(x, y)$. Seja (x_0, y_0) um ponto no plano xy e $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o ponto correspondente na superfície. Manter y fixo igual a y_0 significa interceptar a superfície pelo plano $y = y_0$. A interseção é uma curva de equação $z = f(x, y_0)$ neste plano. O número $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente a esta curva quando $x = x_0$. Assim, na figura 3.11, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Analogamente, a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ é a curva de equação $z = f(x_0, y)$ e o número $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente a esta curva quando $y = y_0$. Na figura 3.11,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

Figura 3.11

Ilustração 1: Figura 1

Hariki (1992, *apud* PÁDUA, 2003, pg. 46) diz que o discurso dos livros-texto do nível superior é codificado por matemáticos pesquisadores, que atuam também como professores, e torna-se embaraçoso saber se eles escrevem científica ou pedagogicamente.

Na perspectiva deste autor, aqui ocorre um conflito que se caracteriza pela predominância no texto de uma concepção de Matemática perfeitamente explicada pelos modelos lógicos. Privilegiando a transmissão do *saber* e não a construção do *conhecimento* por parte dos sujeitos. Há pouca intenção retórica e heurística, o que empobrece o texto na perspectiva semântica.

Mas retomando a figura 1, o texto poderia transmitir o *sentido* geométrico da simbologia $z = f(x, y_0)$ de maneira que relacionasse com os conhecimentos do Cálculo I. Todavia, tal oportunidade é perdida e, apressadamente, o símbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é visto como o coeficiente angular da reta tangente à curva, quando $x = x_0$ Mas a mesma noção, restrito às curvas no R^2 não foi estudada anteriormente, por que não explicitar tal ligação? Mostrar que as simbologias coincidem em sentido e valor numérico, se nos restringir-mos aos planos xz ou yz?

Sentimos aqui um dos *conflitos* mencionados por Hariki, ou seja, a valorização da transmissão e formalização do conhecimento sobre *derivadas parciais*. A preocupação excessiva com a transmissão da informação poderá fornecer ao aluno a impressão que se trata de um *conhecimento* novo, que não se estabelece a partir do antigo; que utiliza métodos distintos, pelo fato, por exemplo, de se tratarem de três dimensões. Ora, tal situação, no ponto de vista de Brousseau (1988, pg. 18) é tratada como um *obstáculo epistemológico*.

E ainda neste caso, observamos a sua utilização nas atividades, restrita a casos particulares dos elementos descritos na figura acima? E tais situações particulares não deviam anteceder o procedimento estrutural geral explicado na mesma? Que *obstáculos semióticos* poderíamos identificar em tal interpretação geométrica?

Certamente, algumas destas questões só podem ser respondidas com uma investigação mais aprofundada. Contudo, temos a pretensão neste estudo inicial, de encontrar algumas pistas para os nossos questionamentos.

Observamos a escassez de trabalhos sobre a noção de *derivada* em várias variáveis. Leme (2003) apresenta algumas noções necessárias na aquisição de conceitos matemáticos avançados, que caracterizam o pensamento *operacional* e *estrutural*, contudo, em uma variável. Outra investigação semelhante é o de Meyer (2003).

Suas analises são referenciadas por Tall, D & Vinner, S. que conceberam as noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual* (TALL & VINNER, 1981).

O estudo descreve as concepções dos estudantes sobre a simbologia $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (*). Desde que estamos atuando num contexto de várias variáveis, passamos então a investigar as *concepções* sobre *notações* do tipo:

$$Lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,x_0)-f(x_0,y_0)}{|\Delta x|},\ Lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+t.\vec{u})-f(P_0)}{t.\left\|\vec{u}\right\|}\ (**).$$

Tais *notações* se apresentam epistemologicamente relacionadas às *definições* formais. Desta forma, são comuns situações que exigem sua utilização. Entretanto, uma dificuldade registrada é que, diante de situações-problema, o estudante não apresenta razoavelmente desenvolvido o hábito de consultar às *definições,* em conseqüência de hábitos do dia-a-dia Vinner (1991, *apud*, MEYER, 2003, pg. 10). Sem falar que, em termos de *tratamento*, no sentido de Duval (1988), (**) traz mais dificuldades que (*).

Vejamos o que ocorre com *representações* do tipo dx e Δx. Percebemos que a obra de Pinto (2004), não traz uma abordagem *operacional* dos símbolos *infinitésimais* $\Delta x \text{ e } \Delta y$. E neste caso, seria interessante trabalhar as *concepções* numéricas dos estudantes relacionadas ao conceito.

Outros elementos relacionados à mesma *definição* são as simbologias como: $P_0+t.\vec{u}$. Aqui, o *sentido* de $f(P_0+t.\vec{u})$ e sua interpretação geométrica não são fornecidos aos alunos por meios de situações particulares. E praticamente fica a cargo do mesmo, relacionar as *representações* $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ e $f(P_0+t.\vec{u})$, o que reconhecidamente não se trata de uma tarefa fácil.

Este tipo de *coordenação* é sublinhado por Duval (1988, *apud*, HENRIQUES, pg. 22, 2006) quando declara ser uma condição fundamental para a aprendizagem. Um exemplo de *tratamento* e *coordenação* exigida em diversas situações formais neste conteúdo se refere à apresentação dos seguintes *registros*:

$$f(x_0+\Delta x,\mathrm{y}_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).\Delta y \quad (1)$$

$$f(P_0+t.\vec{u})-f(P_0)-\nabla f(P_0)\cdot(tu) \quad (2)$$

Para um professor experiente, é trivial (como diz o jargão) que as equações (1) e (2) representam a mesma coisa. E para os estudantes, tal fato lhes parece claro? Acreditamos que não, pois na prática as dificuldades são enormes. Passamos a apresentar a principal *definição* considerada neste estudo.

DEFINIÇÃO: A **DERIVADA DIRECIONAL** DE UMA FUNÇÃO $z=f(x,y)$ EM UM PONTO P_0 NA DIREÇÃO DO VETOR $\vec{u}$ É DEFINIDA POR $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)=Lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+t.\vec{u})-f(P_0)}{t.\left\|\vec{u}\right\|}$, SE TAL LIMITE EXISTIR.

Encaramos a abordagem acima como uma influencia da corrente filosófica denominada *nominalista* que, segundo Buffet (2003, pg. 25), se prende em tomar as *definições* dos *objetos* restritas a uma perspectiva abreviativa e denominativa.

Leithold (1992) apresenta um procedimento geral, que se encontra ligado às propriedades intrínsecas de uma *superfície abstr*ata qualquer, sendo apresentado ao leitor e, logo em seguida se vê um exercício típico que é sugerido, sem reforçar os *argumentos* e idéias formais anteriormente apresentados.

Um *obstáculo* aqui facilmente identificado seria a ligação conceitual entre $y = g(x)$ e $y = g(x) = f(x,b)$, com suas *derivadas,* por exemplo. Ficando sob a responsabilidade de o aluno descobrir que se tratam da mesma coisa e se referem aos antigos saberes do Cálculo I.

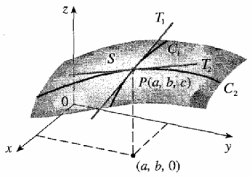


FIGURA 1
As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes C_1 e C_2.

Para dar uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremos que a equação $z = f(x, y)$ representa a superfície S (o gráfico de f). Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S. Fixando $y = b$, restringimos nossa atenção à curva C_1 na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S. (Ou seja, C_1 é o traço de S no plano $y = b$.) Da mesma forma, o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P (veja a Figura 1).

Note que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$.

Então, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos traços C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.

Como vimos no caso da função índice de calor, as derivadas parciais podem ser interpretadas como taxas de variação. Se $z = f(x, y)$, então $\partial z/\partial x$ representa a taxa de variação de z com relação a x quando y é mantido fixo. Da mesma forma, $\partial z/\partial y$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

EXEMPLO 2 □ Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, ache $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO Temos

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$, e o plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Como na discussão precedente, indicamos por C_1 na Figura 2.) A inclinação da reta tangente à parábola no ponto (1, 1, 1) é $f_x(1, 1) = -2$.

Ilustração 2

O procedimento descrito acima apresenta características de uma linguagem que prescinde de uma compreensão *estrutural* dos *objetos* aos quais, o autor faz referência. Acreditamos que o caráter *operacional* do conceito poderia ser mais pormenorizado ao aprendiz.

Passamos à descrição de dois *teoremas* que atribuem interessante *sentido* à *definição* apresentada. Nossa preocupação em investigar a aprendizagem destes resultados e a apresentação de suas *demonstração* aos alunos, é evitar que os *teoremas-em-ato* se dissipem em virtude da ausência de uma *formulação* e *prova* (BROUSSEAU, 1988, pg. 9) que se faz necessário neste nível.

O $teorema_1$ possibilita um melhor *tratamento*, se comparado com a formulação da *definição* inicial.

$Teorema_1$: SE $z = f(x, y)$ É DIFERENCIÁVEL EM $P_0 = (x_0, y_0)$, ENTÃO VALE $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \dfrac{u}{\left\|\vec{u}\right\|}$, ONDE $\nabla f(P_0) \cdot \dfrac{u}{\left\|\vec{u}\right\|}$ É O PRODUTO ESCALAR DE $\nabla f(P_0)$ PELO VETOR UNITÁRIO $\dfrac{u}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

O $teorema_2$ apresenta uma interpretação geométrica da *derivada parcial* e sua ligação conceitual com o *vetor gradiente*.

$Teorema_2$: SE $z = f(x, y)$ É UMA FUNÇÃO DIFERENCIAVEL EM P_0, TAL QUE $\nabla f(P_0) \neq 0$, ENTÃO O VALOR MÁXIMO DE $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ OCORRE QUANDO $\vec{u}$ TEM A DIREÇÃO E O SENTIDO DO VETOR $\nabla f(P_0) \neq 0$, SENDO $\left\|\nabla f(P_0)\right\|$ O VALOR MÁXIMO.

Os enunciados acima necessitam do emprego de um *método de validação* que em matemática chamamos de *prova* ou *demonstração*. Dentre a variedade de significados na noção de *prova* em matemática destacamos duas *definições*, baseando-se em Raman (2002, pg.3) que apresenta na sua tese de doutorado:

"$Definição_1 : (lógica)$ Uma seqüência finita de proposições, em que cada proposição é derivada de um axioma ou de uma proposição precedente, por meio de uma inferência lógica. (The Columbia Encyclopedia. 2001)".

O mesmo pesquisador destaca a mudança de *concepção* de matemáticos profissionais e educadores matemáticos no que se refere à *definição* descrita anteriormente. Justifica que, mudanças têm sido verificadas no sentido de uma preocupação maior com o caráter psicológico de aquisição de tal noção. Por outro lado, até que ponto esta mudanças influenciam na prática as ideologias presentes num livro didático de Cálculo? Vejamos a segunda definição.

"$Definição_2 :$ (psicológica) Um argumento que fornecemos com a intenção de convencer outros (e, às vezes a si mesmo) da corretude de uma asserção. (MOVSHOVITZ-HADAR, 2001)".

Admitamos a seguinte situação hipotética. O professor de Cálculo apresenta os *teoremas* acima. Se sua linha de exposição aproximar-se da maioria dos livros didáticos, como no exemplo de PINTO (2004), ela abordará a *demonstração* do fato principal de cada *teorema*, sem uma devida reflexão sobre as *idéias chave* envolvida. Vemos o *formalismo* sendo utilizado como instrumento para a aprendizagem. Mas os efeitos da *rigorização* do Cálculo podem ser vistos em modernos livros texto e nas salas de aula e suas conseqüências não são boas (RAMAN, 2003, pg.7).

Em seguida uma descrição rápida e aplicação das *idéias procedimentais* abordadas no *teorema* visto e, por último, e em raríssimos casos, as *idéias heurísticas* e *intuitivas* envolvidas. Por exemplo, consideremos: $6 - x^2 - 2y^2 - z = 2$. Temos um *parabolóide elíptico*, com vértice no ponto $(0,0,4)$. Ele poderia tomar o vetor $\vec{u} = (1,1)$ e o ponto $P_0 = (1,1,1)$, na *superfície*. Daí, o professor pode tomar a imagem da função $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, sobre a reta L: $(1,1,) + t.(1,1)$, que equivale a $(x, y) = (1 + t, 1 + t)$.

Portanto a nossa imagem será do tipo $f(x, y)$, onde $x = y$. Daí, calcular o *limite*: $Lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,1+t) - f(1,1)}{t.\left|\overrightarrow{(1,1)}\right|} = 3\sqrt{2}$. Por outro lado, pode efetuar o cálculo de: $\nabla f(1,1) \cdot \frac{(1,1)}{|(1,1)|} = 3\sqrt{2}$. E conduzir o aluno a verificar como os resultados coincidem, valorizando as idéias intuitivas envolvidas com $teorema_1$. Uma prática usual em virtude da extensa ementa é o pouco tempo dispensado para se trabalhar às *idéias chave* dos *teoremas* (RAMAN, 2002, pg. 45). Tomando o $teorema_1$, a *idéia-chave* seria apenas uma forma diferente de descrever a *diferenciabilidade* da função, restrita a uma *reta* do tipo $P(x_0, y_0) + t.\vec{u}$, utilizando as *representações* usuais da *derivada parcial*.

Após termos identificado nos *documentos* analisados alguns elementos que podem funcionar como entraves a aprendizagem de nossos estudantes, passaremos a descrição das atividades que nos forneceram situações de observação dos sujeitos.

MÉTODOS: APLICAÇÃO DA *SEQUENCIA FEDATHI* COMO METODOLOGIA DE ENSINO NO CÁLCULO

A *transposição didática* baseada na *Seqüência Fedathi – SF* caracteriza-se pela criação de um clima experimental de investigação matemática, ou seja, a criação e apresentação de situações-problema semelhantes às quais um matemático enfrenta.

Na elaboração das atividades aplicadas ao longo da *SF*, aproximamo-nos das idéias de Balacheff (1987, *apud* FENANDES, 2004, pg.42), com a proposição de *situações-didáticas* que envolvem íntima relação entre as *provas* e contradições sob perspectivas cognitivas. Quer dizer, os próprios problemas são fonte da gênese cognitiva, dos conceitos de *demonstração* e de *prova* e que prescindem de uma *argumentação* que envolve a noção de *diferenciabilidade*.

Nossas ações didáticas foram organizadas segundo a hierarquização dos quatro níveis constituintes da *Seqüência Fedathi - SF* descritos como segue:

- **Nível 1** Tomada de posição – apresentação do problema. Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema para o aluno, que deve possuir meios de atacar o problema mediante a aplicação do conhecimento a ser ensinado.
- **Nível 2** Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Destinado à discussão e debate envolvendo os elementos: *professor-aluno-saber*. Aqui, há momentos em que determinada *argumentação*, reconhecida por uma comunidade como *prova*, adquire grande importância na situação enfrentada.

Um dos nossos problemas é identificar as possíveis formas de obtenção das expressões $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}_0), \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$; de forma que os alunos possam comparar com as *declividades* de uma *reta* e as noções do Cálculo I. As *idéias chave* e *heurísticas* do $teorema_1$ podem ser trabalhadas neste nível.

- **Nível 3** Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem á solução do problema. Aqui, os alunos organizados em grupos devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados nas questões e convencer por meio de suas *argumentações* e/ou *demonstrações*, outros grupos.
- **Nível 4** Prova – apresentação e formalização do modelo matemático e ser ensinado. Aqui, a didática do professor determinará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo saber, pois, além de ser necessário manter a atenção e motivação dos alunos, ele propiciará aos alunos perceber a ligação entre o modelo das *conjecturas* propostas e o modelo científico-matemático que subjaz em cada situação.

QUADRO TÉORICO E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Após efetuar extenso levantamento bibliográfico, segundo as etapas previstas por CERVO, A. e BERVIAN, P. A. (2002), escolhemos as *fontes primárias*, com destaque para PINTO, D.; CANDIDA, M.; MORGADO, F. (2004). Para as situações de *observação*, optamos por Perminov (1988), presente na tese de Silva (2001).

Ele distingue cinco tipos de *intuição matemática*, que desempenham um papel relevante no raciocínio inicial do aprendiz. Passaremos a caracterizar sua utilização em nosso estudo.

- **Intuição empírica** - baseia-se na analogia e diretamente da experiência adquirida na manipulação de uma classe de objetos materiais ou conceituais e que possibilita a transferência dos atributos freqüentes dentro da classe de *objetos*.
- **Intuição objetiva** - faculdade humana de distinguir e identificar os objetos no ambiente de suas combinações algébricas ou geométricas simples.
- **Intuição lógica** – manifesta-se primariamente nas conclusões ou *inferências* "por definição", bem como extraídas de modelos lógicos de *transitividade* e *contraposição*.

Exemplo: Na **questão quatro**, temos um exemplo da utilização de tal *intuição*, quando ao aluno é requerida a necessidade de utilizar $Lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

➢ **Intuição categórica** - também chamada de *geométrica* ou *espacial*, que relaciona as suposições aos conceitos de espaço e tempo.

Exemplo: Ao longo das atividades e de entrevistas, questionamos aos alunos a respeito de sua interpretação geométrica da *derivada parcial e direcional*, denotadas por $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$, como vemos na **questão cinco**.

➢ **Intuição conceptual** - acrescenta à noção de um objeto um componente derivado da teoria da qual o *objeto matemático* é considerado em suas relações condicionadas pela estrutura formal da teoria..

ENTREVISTAS E DADOS DA PESQUISA

Conforme Balacheff (1987, *apud*, FERNANDES, 2004, pg. 45), para o domínio das *demonstrações*, é necessário a ascensão, por parte do aluno, a uma linguagem funcional. Contudo, a maioria dos alunos que já cursaram a disciplina Cálculo III, se queixa das *notações* e simbologias corriqueiras, comprometendo a evolução adequada do *raciocínio lógico* e, portanto, dificilmente ascendendo a esta linguagem funcional. Vemos isto nos trechos que seguem.

Aluno 1 : "A passagem através dessa linguagem é um pouco estranha para quem começa estudar um pouco de Calculo III. Onde porém deve-se correr atrás de alguns conceitos, onde o livro ultrapassa alguns detalhes simples onde quem não conhece acaba ficando difícil."

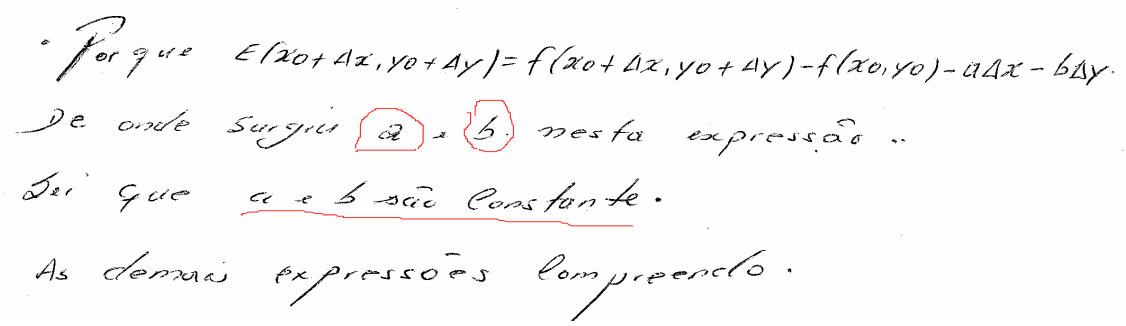
Aluno 2 : "Podemos avaliar o curso de Cálculo III, como sendo mais ou menos complicado. Neste temos algumas demonstrações de teoremas que exigem certa maturidade fundamental para compreende-los. Temos notações complicadas que atrapalham o curso."

Aluno 5 : "As demonstrações e notações as vezes confundem. O pouco tempo para fazer mais exercícios."

Aluno 6 : "Uma das coisas que me deixou com dificuldade foram as notações. Achei também o livro adotado difícil, pois omite muita coisa."

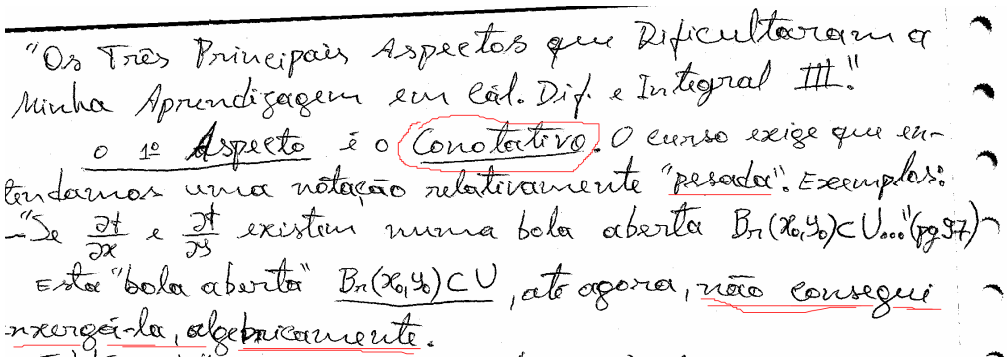
O caráter complexo da linguagem e das *notações* adotadas em cursos desta natureza propicia barreiras à *intuição praxeológica* e muitos alunos esbarram nas dificuldades representadas pela *linguagem* matemática do Cálculo, e não somente pelas idéias em si (BROLEZZI, 1996, pg. 49).

Com respeito à *demonstração* do *teorema* 2, o aluno 10 declara que não compreende o *sentido* dos números reais a e b, presentes na *definição* de diferenciabilidade. Podemos verificar no trecho seguinte:



Temos evidenciado que a questão da compreensão da *existência*, em Matemática destes *objetos*, em geral, é posta de lado ou simplesmente não mencionada. A declaração do aluno 10 é esclarecedora das dúvidas freqüentes, no caso da *notação* da *diferenciabilidade* e da *existência* das constantes descritas no *teorema* 3

O aluno 7 foi consultado ao final da disciplina e lhe foi requisitado que apontasse certas dificuldades enfrentadas ao longo do curso. Ele se refere da seguinte maneira:



Na **tabela 1**, são apresentados em termos de porcentagem (%), para cada item, os índices quantitativos dos acertos e erros.

Em virtude da quantidade de itens, destacamos os resultados de (i), (o), (p) e (q). O primeiro, por estar ligado diretamente ao *teorema* 2, e observamos grande quantidade de fracassos neste item. No item (o), temos o caso do enfraquecimento das condições (*hipóteses*) de ocorrência do *teorema* 3, o que foi motivo de confusão e insegurança declarada pelos sujeitos. Já no item (p), novamente envolvemos o teorema 3, aliado à necessidade do emprego da *intuição objetiva*. Persistiram as dificuldades do item (i), como pudemos observar.

Finalmente, o item (q), que se mostrou suficientemente importante ao longo do estudo, pois apresenta a necessidade de compreensão da *existência* e *unicidade* das *derivadas parciais* de uma função.

Tabela 1

Questões	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**
Acertos (%)	73	73	60	33	60	66	73	100	13	86	66	86	50	46	27	23
Erros (%)	27	27	40	67	40	34	27	0	86	13	34	13	50	53	73	67

Na **questão um** e **quatro (Apêndice I)**, desenvolvemos uma forma de analisar e, também, instigar o estudo e a compreensão da *demonstração* do *teorema* 1. Inicialmente, fornecemos uma folha em separado com o *teorema*. Os alunos foram instruídos a colocar um sinal $*$, trechos ou passagens dedutivas, que sentissem não haver compreendido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos observar que os alunos sentem uma diferença considerável na transição Cálculo I para o Cálculo III. A linguagem carregada e a sofisticação dos *argumentos lógicos* e *intuitivos* são fatores indicados por estes sujeitos como barreiras consideráveis na sua aprendizagem.

Um dos elementos indicados pelos aprendizes ao longo das entrevistas se refere ao distanciamento dos modelos matemáticos a das *argumentações* desenvolvidas nos Cursos de Cálculo I e III, possibilitando a impressão de não serem pré-requisitos um do outro.

Os livros didáticos não apresentam uma linguagem matemática que permita o aluno decifrar e compreender o *sentido intuitivo* dos enunciados. Por exemplo, o caso dos *teoremas* relacionados à noção da *diferenciabilidade*, em que sentimos a necessidade de fornecer aos estudantes uma re-leitura mais pormenorizada do texto, das *hipóteses* presentes, dos casos particulares e as ligações conceituais com o Cálculo I.

De fato, várias *inferências* presentes nas *demonstrações* dos *teoremas* 1,2, e 3 escolhidos nesta pesquisa só foram compreendidas com a intervenção do professor, que ocorreu no **nível 4** da *Seqüência Fedathi*.

Sentimos, no estudo da *definição* investigada, que outros caminhos metodológicos devem ser trabalhados com vistas a uma compreensão melhor desta noção, por parte dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Caso contrário, a *intuição lógica* e a *intuição geométrica* permanecerão limitadas e, possivelmente, conduzindo-os às contradições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, 18 (2): 147-176, 1987.
2. BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Calculo Diferencial e Integral*. (Tese de doutorado), USP, 1999.
3. BOGDAN, R. & BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*, Editora Porto, Portugal, 1994.
4. BROLEZZI, A. C. *A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática* (Tese de doutorado), Ensino de Ciências e Matemática, USP/SP, 1996.
5. FERNANDES, A. M. T. *A extimidade da demonstração* (Tese de doutorado), UNESP/Rio claro, SP, 2004.
6. LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica,* Volume 2, 2ª ed., São Paulo, Harbra, 1982.
7. MARSDEM, J. & TROMBA, A. *Vector Calculus,* New York, W.H. Freeman and Company, 1996.
8. MILANI, R. *Concepções infinitesimais em um Curso de Cálculo* (Dissertação de Mestrado), UNESP/Rio Claro, SP, 2002.
9. MIYAKAWA, T. *Une etude du rapport entre connaissance et prevue:* le cas de la notion de symétrie orthogonale (Thése de doctorat), Université Joseph Fourier, Grenoble I, Laboratoire LEIBNIZ, France, 2005.
10. PEDEMONTE, B. Etude didactique et cognitive dês rapports de l´argumentation et de la démonstration dans l´apprentissage dês mathématiques (Thése de Doctorat), Université de Grenoble, Université Joseph Fourier – Grenoble I, 2002.
11. PINTO, D. & CANDIDA, M. Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis, Ed. UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.
12. SILVA, F. R. *A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:* a visão de professores-pesquisadores e autores de livros (Tese de doutorado), Campinas, UNICAMP, 2001.

ANEXO I: APRESENTAÇÃO DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA

Questão um: Consideremos o trecho abaixo da demonstração do teorema 1 indique com um sinal que explicite uma argumentação ou um encadeamento lógico não compreendido em sua opinião.

Teorema 3.1: *Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então $z = f(x,y)$ é contínua em (x_0, y_0).*

Demonstração : Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então existem constantes a e b tais que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0,$$

onde $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - a\Delta x - b\Delta y.$

Como

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \|(\Delta x,\Delta y)\| \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0$$

e

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (a\Delta x + b\Delta y) = 0,$$

segue que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f(x_0,y_0) + a\Delta x + b\Delta y + E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)) = f(x_0,y_0).$$

Isto mostra que f é contínua em (x_0, y_0).

Questão dois: Marque (V) ou (F), em cada item abaixo.

i) Se a função do tipo $z = f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos, então, suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos e são contínuas ( ).

o) Se as duas derivadas parciais existem e apenas uma delas é contínua, então, ao menos a função deve ser contínua, mesmo não podendo garantir que será diferenciável ( ).

p) Se a função $w = f(x,y,z)$ é diferenciável em todos os pontos, então suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ existem em todos os pontos e são contínuas ( ).

q) Na *definição*, podemos afirmar que **a** e **b** são as derivadas parciais e, além disso, são contínuas ( ).

DEFINIÇÃO: SEJAM $z = f(x,y)$ UMA FUNÇÃO DEFINIDA NUM CONJUNTO ABERTO $U \subset R^2$ E $(x_0, y_0) \in U$. DIZEMOS QUE F É **DIFERENCIÁVEL** EM $(x_0, y_0) \in U$ SE, E SÓ SE, EXISTEM CONSTANTES REAIS A E B TAIS QUE: $Lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{|(\Delta x,\Delta y)|} = 0$,ONDE $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - a.\Delta x - b.\Delta y$.

Questão três: Consideremos $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x.y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Verifique que existem as derivadas parciais, que apresentam também a continuidade, todavia, f não é diferenciavel. Isto contraria o *teorema* 3? Consideremos $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 0, \text{ em qualquer outro caso} \end{cases}$. Contraria o teorema 3?